BORINO BORINI

I CONTINUANTI

G. Medri & C. - Tipografi
Forlì 1900

BORINO BORINI

I CONTINUANTI

G. Medri & C. - Tipografi
Forlì 1900

INDICE

INTRODUZIONE

Una delle più importanti applicazioni della teoria dei determinanti, su altri argomenti d' analisi, è quella che ha fondamento nella considerazione speciale dei determinanti così detti *continuanti.*

L' importanza dello studio di questi sta in ciò che, risultando una frazione continua come un quoziente di due continuanti, si può stabilire la teoria delle frazioni continue prendendo come punto di partenza l' espressione di esse mediante questi determinanti.

Secondo il Günther, la possibilità della considerazione di una frazione continua come un quoziente di due continuanti sembra che sia stata osservata per la prima volta dal matematico danese Ramus (1); il Muir, invece, dice che il primo imperfetto germe di una teoria di continuanti è dato dal Sylvester.

Questi, in una memoria dal titolo: *On a remarkable modification of Sturm's theorem* (2), espone la relazione fra determinanti e frazioni continue e, oltre che servirsi dei continuanti per dare una più semplice e completa prova del teorema che vuol dimostrare, li applica anche per la dimostrazione della proprietà, che si designa abitualmente come fondamentale nella teoria delle frazioni continue, espressa nella formola

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n ;$$

concludendo col dire che « l'introduzione dei determinanti nell'algoritmo

---

(1) Determinanternes Anvendelse til at bestemme Loven for de convergerende Bröker, Det Kong. Danske Vidensk. Selsk, naturv. og math. Afhandl. Kjöbenhavn 1855. S. 106.

(2) Philosophical Magazine 1853 t. V pag. 453.

delle frazioni continue non può mancare d'avere una importante applicazione nel futuro trattamento e sviluppo della teoria dei numeri ».

Il Sylvester in questa stessa memoria nota ancora come, rappresentando, i continuanti, i numeratori e i denominatori delle ridotte delle frazioni continue, essi diano una prova immediata e visibile della semplice ed elegante regola per formare tali numeratori e denominatori per mezzo dei loro termini: questa noi possiamo prenderla come regola pratica per lo sviluppo di un continuante.

Sempre intorno ai continuanti appare, dello stesso Sylvester [1], un'altra memoria, in cui l'A. stabilisce un teorema fondamentale e alcuni corollari.

Altri matematici, come lo Spottiswood e l'Heine, furono condotti, per diverse vie, sullo stesso tema, ma senza che, dalle casuali considerazioni dedotte, ne venisse alcun progresso per la scienza. Lo Spottiswood, in una sua memoria dal titolo: *Elementary theorems relating to Determinants* [2], accenna semplicemente all'esprimibilità di una frazione continua mediante i continuanti, e l'Heine, dopo aver trovato anch'egli che il numeratore e il denominatore di una ridotta si possono rappresentare con continuanti, visto che il Painvin aveva posto il determinante di un certo sistema sotto la forma di continuante, approfitta di quel sistema, per trattare certe funzioni di Lamé con le frazioni continue [3].

Il Thiele [4] ha parlato pure dell'utilità dello studio dei continuanti, facendone anche una trattazione sistematica, riguardante in special modo le applicazioni alla geometria; mentre, subito dopo, il Casorati in certi problemi di fisica e il Bauer in certi problemi d'analisi, hanno ottenuto maggior successo. Il Casorati [5] risolve problemi diottrici e il Bauer, in un suo importante lavoro [6], dimostra, con una serie di trasformazioni di determinanti, un teorema intorno al prodotto di due frazioni continue, dal quale facilmente si può dedurre una formola del Wallis.

Una trattazione sistematica intorno ai continuanti fu fatta, indipendentemente e contemporaneamente al Thiele, anche dal Günther ed esposta da questi in un volume dal titolo: *Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form* [7].

---

(1) Philosophical Magazine 1853 t. VI p. 297.
(2) Crelle's Journal, 1855. 51. Band. S. 374.
(3) Crelle's Journal, 1859. 56. Band. S. 79, 80, e 97.
(4) Bemarkning om Kjaedebroker, Tidsskrift for Mathematik, udgivet a C. Tychsen, V. S. 144.ff.
(5) Le proprietà cardinali degli strumenti ottici anche non centrati. Cap. I Sezione II pag. 73.
(6) Von einem Kettenbruche Euler's und einem theorem von Wallis, München 1872
(7) Erlangen, 1873.

Quest' opera viene divisa dall' A. in tre capitoli, comprendenti, complessivamente, ventotto paragrafi, e in alcune aggiunte ai capitoli stessi. Essa presenta, a differenza di quella del Thiele, in parte un contenuto storico e in parte un contenuto analitico.

Nel primo capitolo l' A. fa delle *osservazioni comparative sui metodi finora adoperati nella rappresentazione dei valori approssimati delle frazioni continue in forme indipendenti,* e ritiene di una certa importanza l' esposizione critica che fa dei vari tentativi antichi e moderni che allo scopo furono eseguiti.

Il capitolo secondo tratta della *rappresentazione dei numeratori e denominatori di ciascuna ridotta in forma di determinante* ed il capitolo terzo dell' *applicazione dei risultati ottenuti all' Analisi, all' Algebra e alla Fisica:* in questo e in quello, i vari teoremi noti prendono una forma più comoda e una più breve dimostrazione, e, in parte, la teoria delle frazioni continue viene esposta, per la teoria dei determinanti, in una forma nuova ed interessante.

L' idea del Günther, in questo suo lavoro, è stata quella di dimostrare che, l' unica rappresentazione del valore approssimato delle frazioni continue, la quale corrisponda a tutte le esigenze, è quella mediante i determinanti; rappresentazione che appare utilissima anche in varie occasioni in cui è richiesto l' uso delle frazioni continue. Anzi l' A. non è alieno dall' affermare che « nella teoria dei determinanti è contenuta la chiave per il trattamento delle frazioni continue ».

Il Günther ha anche una pregiata memoria intorno alla *soluzione delle equazioni per mezzo delle frazioni continue* (1).

In questa, egli applica i continuanti alla dimostrazione della seconda delle proprietà poste dal Baltzer per l' affermazione scientifica del metodo di Fürstenau intorno alla risoluzione di un' equazione algebrica, facendo di poi un confronto col metodo di Lagrange, che, come è noto, si serve esso pure delle frazioni continue; confronto dal quale risulta quanto il suo metodo di risoluzione superi quello del Lagrange in generalità ed in esattezza.

Un pieno ragguaglio delle proprietà dei continuanti scritto, come l' A. stesso dichiara, senza la conoscenza della precoce scoperta del Sylvester, si trova in due memorie del Muir (2).

Coll' aiuto dei continuanti fu data, dal Muir, una soluzione elegante del problema di trasformare una serie di potenze crescenti in frazione continua; problema che, nella sua forma generale, lo Stern (3)

(1) Math. Annalen Vol. VII p. 267.
(2) Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. VIII Session 1873-74 pag. 229 e 380.
(3) Crelle's Journal, X. 245.

invano si affaticò di trovarne la soluzione.

Il Muir la pubblicò in una memoria dal tilolo: *New general formulae for the transformation of infinite series into continued fractions* (1). In questa stessa memoria l' A. riconosce che, una formola dedotta dal Gauss, nel trattamento della sua serie ipergeometrica, non è che un caso particolare del suo problema, e inoltre mostra la radicale distinzione fra le frazioni continue, ottenute, per ogni serie particolare, dal suo metodo e da quello scoperto dall' Eulero (2), fino allora riconosciuto il più perfettamente generale per la trasformazione di serie in frazioni continue.

Lo stesso Muir ci dà, in appresso, un nuovo teorema sui continuanti (3), la cui importanza sta più che altro nella chiarezza della dimostrazione. Di questo teorema segue subito una dimostrazione più generale (4), la quale trova tosto la sua applicazione nell' estensione del teorema di Bauer, riguardante un prodotto di frazioni continue.

Il Günther torna, nuovamente, in una sua opera speciale (5), ad occuparsi dei continuanti, dedicando a questi un intero capitolo, suddiviso in undici paragrafi.

Si può citare poi del Muir, ancora, una *Note on a theorem regarding a series of convergents to the roots of a number* (6), nella quale l' A. fa delle ulteriori investigazioni intorno ad un teorema scoperto dal Sang e da questi annunciato, come il risultato di un processo di induzione, nella sua memoria *On the extension of Brouncker's method to the comparison of several magnitudes* (7). Anche qui il Muir ottiene mediante i continuanti risultati soddisfacentissimi.

Trovasi inoltre una memoria *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continues* (8), estratto di una lettera del v. Koch al Poincaré. In questa l' A. considera uno speciale determinante normale, che non è se non la trasformazione di un continuante, in rapporto alla frazione continua da esso generata.

Come termine alle nostre investigazioni intorno ai continuanti, potremo ricordare gli accenni che di questi ne fanno il Cesàro (9) ed il Pascal (10).

---

(1) Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVII p. 469 for the Session 75-76.
(2) Opuscola Analitica t. ii p. 138.
(3) Philosophical Magazine 1877 pag. 137.
(4) Philosophical Magazine 1877 pag 360.
(5) Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende, Erlangen 1877 Kap. V. S. 123.
(6) Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XIX Session 1891-92.
(7) Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XVIII pag. 341, 1890-91.
(8) Comptes Rendus 1895 Vol. 120 Pag. 144.
(9) Corso di Analisi Algebrica con introduzione al Calcolo Infinitesimale.
(10) I Determinanti: Manuali Hoepli.

Diremo anzi che fu dietro alla bibliografia data dal Pascal, che ci proponemmo, riconosciuta l' importanza dell' argomento, di raccogliere quanto si poteva trovare intorno ai continuanti e di porlo in una specie di trattato.

La presente monografia è stata divisa in sette capitoli.

Nel primo, trattiamo dei determinanti d' ordine finito, e, nel secondo, diamo alcuni cenni sui determinanti d' ordine infinito, servendoci, a tal uopo, di una memoria del Cazzaniga (1), in cui l' A. raccoglie e generalizza tutti i lavori comparsi sull' argomento. Nei capitoli che seguono, fino al settimo, trattiamo dei continuanti e delle loro relazioni colle frazioni continue e, nel capitolo settimo, con le memorie del Bortolotti (2), esponiamo la generalizzazione delle frazioni continue algebriche, secondo l' algoritmo del Pincherle, mediante i determinanti.

---

(1) *Sui determinanti d' ordine infinito:* Annali di Matematica pura ed applicata 1897.

(2) *Sui sistemi ricorrenti del 3. ordine e in particolare sui sistemi periodici:* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Vol. V. 1891. pag. 129.

Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche periodiche: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Vol. VI. 1892. pag. 1.

CAPITOLO I.

Determinanti d'ordine finito.

Lo scopo del presente capitolo è quello di richiamare alla mente del lettore le definizioni e le proprietà fondamentali dei determinanti poichè, per la natura stessa dei continuanti, le proprietà speciali che di questi dedurremo non sono che conseguenze facili ed evidenti di quelle: questo capitolo non sarà quindi, in massima, che una semplice esposizione di enunciati di teoremi relativi ai determinanti.

1. Definizioni fondamentali.

a) Sia n un numero intero e positivo. Abbiansi n^2 numeri qualunque (*elementi*) disposti in n linee di n numeri ciascuna in modo da formare un quadrato. Ogni numero si rappresenti con una lettera fornita di due indici, di cui il primo indicherà la linea e il secondo la colonna a cui l'elemento appartiene:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

Si faccia ora il prodotto di n elementi scelti in modo che due di essi non appartengano mai nè alla medesima linea nè alla medesima colonna.

Il prodotto avrà in generale la forma:

$$a_{1\alpha}\ a_{2\beta}\ \ldots\ldots\ a_{n\lambda}$$

dove $\alpha\ \beta \ldots \lambda$, sarà una delle $n!$ permutazioni dei numeri 1, 2, ... n, e gli si attribuirà il segno + o — secondo che la permutazione $\alpha\ \beta \ldots\ldots \lambda$ è della prima o della seconda classe. La somma algebrica di tutti i siffatti prodotti (*termini*) dicesi *determinante* degli n^2 numeri dati.

b) Il determinante si indica col seguente specchio:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

od anche

$$\Sigma \pm a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ldots\ a_{nn}$$

c) Il numero n si chiama *ordine* del determinante.

Il termine

$$a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ldots\ a_{nn}$$

è detto *termine* o *diagonale principale*. Ad esso compete il segno + poichè la permutazione dei secondi indici è di prima classe; agli altri termini, come s'è detto, si dà il segno + o — secondo che la permutazione è di prima o di seconda classe.

2. Teoremi sui determinanti.

a) Il valore di un determinante non muta scambiando le linee in colonne e viceversa.

È evidente che tutto sta nel mostrare che i termini del determi-

nante si ottengono, ciascuno col proprio segno, facendo sul termine principale le permutazioni sui primi indici anzichè sui secondi.

Si ordinino i fattori del termine

$$a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \;.\;.\;.\; a_{\alpha'1}\, a_{\beta'2} \;.\;.\;.\; a_{n\lambda}$$

in modo che i secondi indici siano nel loro ordine naturale, sarà:

$$a_{\alpha'1}\, a_{\beta'2} \;.\;.\;.\; a_{1\alpha} \;.\;.\; a_{2\beta} \;.\;.\;. \qquad :$$

ma questo non è altro che il termine ottenuto dal principale con una permutazione dei primi indici: essendo poi evidente che il numero degli scambi dei primi indici è uguale a quello dei secondi si conclude che le due permutazioni sono della stessa classe e che i termini oltre ad essere uguali hanno anche lo stesso segno.

b) Facendo uno scambio fra due linee o due colonne il determinante non cambia di valore ma di segno.

Sia D' il determinante ottenuto da D mediante lo scambio fra le linee o le colonne. I termini di D o di D' si ottengono, con permutazioni dei primi o dei secondi indici, dai loro termini principali rispettivi. Avendo il termine principale di D' uno scambio in più o in meno di quello di D, ne viene che tutti i termini di D sono uguali e di segno contrario a quelli di D', vale a dire risulta:

$$D = -D'$$

c) Se si fanno r scambi fra linee, ed s fra colonne, si ha:

$$D' = (-1)^{r+s}\, D.$$

d) Un determinante, avente due linee o colonne uguali, è identicamente zero.

Infatti, per l'uguaglianza di quelle due linee o colonne, si ottiene, scambiandole fra loro:

$$D = -D \qquad \text{cioè} \qquad D = 0.$$

3. Determinanti minori.

a) Chiamasi *minore* di ordine r, di un dato determinante d'ordine n, quello che si ottiene sopprimendo nel proposto $n-r$ linee e $n-r$ colonne.

In particolare, un minore d'ordine $n-1$ si ottiene sopprimendo una linea ed una colonna. Se la linea soppressa è la r^{esima} e la colonna è la s^{esima}, il minore, moltiplicato per $(-1)^{r+s}$, prende il nome di *elemento reciproco* di a_{rs}: si indicherà con A_{rs}.

b) Un determinante, avente gli elementi di una linea, ad eccezione di uno, tutti uguali a zero, è uguale al prodotto dell'elemento non zero pel corrispondente elemento reciproco.

In primo luogo, supponiamo nulli gli elementi della prima linea eccettuato il primo. Dovendo, ciascun termine del determinante, contenere un elemento della prima linea, il nostro determinante si ridurrà alla forma

$$a_{11}\ \Sigma \pm a_{22}\ a_{33}\ .\ .\ .\ a_{nn}$$

dove

$$\Sigma \pm a_{22}\ a_{33}\ .\ .\ .\ a_{nn}$$

è appunto il minore che si ottiene dal proposto sopprimendo la prima linea e la prima colonna.

Ora, in generale, supponendo nulli tutti gli elementi dell' r^{esima} linea ad eccezione di a_{rs}, noi possiamo, mediante sostituzioni circolari delle prime r linee e delle prime s colonne, portare l' r^{esima} linea e l' s^{esima} colonna, rispettivamente, al posto della prima linea e prima colonna e così ricadiamo nel caso speciale precedente.

Ma, il nostro determinante, in causa degli scambi eseguiti fra linee e colonne, viene moltiplicato per $(-1)^{r+s}$; quindi, evidentemente, risulta uguale all'elemento a_{rs} pel proprio elemento reciproco A_{rs}.

c) Da ciò risulta che:

si può sempre crescere l'ordine di un determinante.

Così:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a_{11} & a_{12} \\ \beta & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

qualunque siano i numeri α, β.

d) Si ha pure che:

se in un determinante gli elementi situati da una stessa parte della diagonale principale sono nulli, esso si riduce al suo termine principale.

e) Si dice che un minore è di *classe pari* o *dispari* allorquando è pari o dispari la somma dei numeri d'ordine corrispondenti alle linee e alle colonne che formano quel minore.

Così i minori

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

sono rispettivamente di classe *dispari* e di classe *pari*.

f) Gli $(n-r)^2$ elementi, in cui si intersecano le $n-r$ linee e le $n-r$ colonne che sopprimiamo in un determinante per la formazione del minore d'ordine r, vengono alla lor volta a formare un minore: questo è d'ordine $n-r$ e contiene elementi che non figurano nell'altro minore: i due minori si dicono *complementari* l'uno dell'altro: se il complemento di un minore lo consideriamo col segno + o — secon-

dochè è di classe pari o dispari allora chiamasi *aggiunto* o *complementare algebrico* del minore dato.

g) Risulta facilmente che ciò che abbiamo chiamato, in principio di questo paragrafo, *elemento reciproco* dell' elemento a_{rs} non è che il *complemento algebrico* del minore

$$|a_{rs}| \, .$$

4. Sviluppo di un determinante per determinanti di ordine inferiore.

a) Dato un determinante dell' ordine n, si consideri un minore e il suo complemento algebrico. Siano rispettivamente dell'ordine r ed $n-r$. Moltiplicandoli fra loro, dopo averli sviluppati secondo la definizione, è chiaro che il loro prodotto conterrà

$$r! \, (n-r)!$$

termini: si dimostrerebbe che tutti questi termini compaiono anche nello sviluppo del determinante dato e di più col medesimo segno.

Siano

$$s_1 \;\; s_2 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; s_r$$

$$t_1 \;\; t_2 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; t_r$$

rispettivamente gli ordini delle linee e delle colonne del minore d' ordine r;

$$s'_1 \;\; s'_2 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; s'_{n-r}$$

$$t'_1 \;\; t'_2 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; t'_{n-r}$$

rispettivamente gli ordini delle linee e colonne del complementare d' ordine $n-r$: di più sia

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_r$$

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_r$$

e

$$s'_1 < s'_2 < \dots < s'_{u-r}$$

$$t'_1 < t'_2 < \dots < t'_{n-r}$$

L' insieme dei numeri s e s' forma una permutazione dei numeri 1, 2, . . . n, e così pure l' insieme dei t e t'.

Un termine del prodotto dei due minori contiene, naturalmente, n elementi del determinante dato, di cui due non appartengono mai alla stessa linea o alla stessa colonna; quindi esso è un termine dello sviluppo del determinante dato.

Si tratta ora di mostrare che coincidono anche i segni.

Si indichi il termine prodotto con

$$a_{s_1\tau_1} a_{s_2\tau_2} \dots a_{s_r\tau_r} \times a_{s'_1\tau'_1} a_{s'_2\tau'_2} \dots a_{s'_{n-r}\tau'_{n-r}}$$

dove $\tau_1 \; \tau_2 \dots \tau_r$ rappresenta una permutazione dei $t_1 \; t_2 \dots t_r$ e $\tau'_1 \; \tau'_2 \dots \tau'_{n-r}$ una permutazione dei $t'_1 \; t'_2 \dots t'_{n-r}$.

Se nella permutazione $\tau_1 \; \tau_2 \dots \tau_r$ vi sono τ scambi e nella $\tau'_1 \; \tau'_2 \dots \tau'_{n-r}$, τ', il segno del termine soprascritto sarà

$$(-1)^{\tau+\tau'}$$

E per la convenzione fatta di mutare il segno al prodotto se si tratta di due minori di classe dispari, vale a dire se

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n + t_1 + t_2 + \dots + t_n$$

è dispari, si vede che il segno del termine prodotto soprascritto sarà dato da

$$(-1)^{\tau+\tau'+s_1+s_2+\dots+s_r+t_1+t_2+\dots+t_r}$$

Si consideri ora il termime come appartenente allo sviluppo del determinante dato. Il suo segno dipenderà dal numero degli scambi contenuti nelle permutazioni

$$s_1 \; s_2 \dots s_r \; s'_1 \; s'_2 \dots s'_{n-r}$$

$$\tau_1 \; \tau_2 \dots \tau_r \; \tau'_1 \; \tau'_2 \dots \tau'_{n-r}.$$

Le s, e così pure le s', fra loro, non danno scambi, perchè disposte in ordine crescente; potranno darli le s con le s'.

Ottenendosi s_1-1 scambi da s_1, s_2-2 da s_2, ecc., si avranno in tutto

$$s_1-1+s_2-2+s_3-3+\ldots+s_r-r=$$

$$=s_1+s_2+\ldots+s_r-\frac{r(r+1)}{2}$$

Si hanno invece, per quel che s'è già visto, τ scambi fra le τ_i fra loro, e τ' scambi fra le τ'_i fra loro, di più gli scambi che le τ_i fanno colle τ'_i. Il numero di questi, rimanendo esso invariato anche se si permutano le τ_i in un modo qualunque, si calcola ragionando come s'è fatto per le s_i: esso è dunque

$$\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_r-\frac{r(r+1)}{2}$$

Ed essendo $r(r+1)$ un numero pari si ha che il termine appartiene in ultima analisi al segno

$$(-1)^{\tau+\tau'+s_1+s_2+\ldots+s_r+\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_r},$$

ed essendo

$$\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_r=t_1+t_2+\ldots+t_r,$$

al segno

$$(-1)^{\tau+\tau'+s_1+s_2+\ldots+s_r+t_1+t_2+\ldots+t_r}$$

come volevasi dimostrare.

Si considerino ora r linee o r colonne. Il numero dei minori d'ordine r contenuti in quelle linee o colonne è dato da

$$\binom{n}{r}.$$

Moltiplicando ciascuno di questi pei loro complementi algebrici si hanno in tutto

$$\binom{n}{r}(n-r)!\,r! = n!$$

termini, tutti differenti fra loro, i minori differendo fra loro almeno per una colonna. Di più questi termini devono essere contenuti, per quello che s'è dimostrato prima, nello sviluppo del determinante dato. Ma questo ha soltanto $n!$ termini; quindi si può concludere enunciando il

Teorema: Un determinante è uguale alla somma dei prodotti dei minori contenuti in n linee pei loro complementi algebrici.

b) Facendo in particolare $r=1$ si riducono i minori agli elementi stessi di una linea o colonna e in tal caso si può enunciare il

Teorema: Un determinante è uguale alla somma algebrica dei prodotti degli elementi di una linea o colonna pei rispettivi complementi algebrici (o elementi reciproci).

c) Facilmente si deduce che:

la somma degli elementi di una linea o colonna pei complementi algebrici di un' altra linea o colonna è zero.

d) Si ha pure che:

un determinante è funzione lineare omogenea degli elementi di una qualunque sua linea o colonna.

In particolare:

se gli elementi di una linea o colonna sono nulli, il determinante è nullo.

e) **Regola di Laplace.**

Se si applica ripetutamente il teorema del comma *a*), di questo paragrafo, a un determinante, si può giungere alla seguente proposizione:

Sieno n_1 n_2 . . . n_k numeri interi tali che

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n :$$

in un determinante di ordine n, scegliamo n_1 linee, poi altre n_2, poi altre n_3, e così di seguito; consideriamo un determinante qualunque contenuto nelle prime n_1 linee, poi uno contenuto nelle seconde n_2 linee, i cui elementi però non appartengano a colonne già considerate nella formazione del primo determinante, e così di seguito; la somma dei prodotti di tutte le siffatte combinazioni di k determinanti con segni opportuni, sarà lo sviluppo del determinante dato.

Ogni termine avrà il segno + o — secondochè compete il segno + o — al prodotto di tutti gli elementi principali dei k determinanti che sono fattori di quel termine.

5. Principî pel calcolo dei determinanti.

a) Moltiplicando una linea o colonna di un determinante per un numero, il determinante viene moltiplicato per questo numero.

Infatti essendo

$$D = a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \ldots + a_{rn} A_{rn}$$

risulta pure

$$kD = ka_{r1} A_{r1} + ka_{r2} A_{r2} + \ldots + ka_{rn} A_{rn}$$

Conseguenza :

Un fattore comune ad una linea o colonna si può portare a fattore esterno del determinante.

b) Un determinante che ha gli elementi di una linea o colonna binomi, si può scomporre nella somma di due determinanti.

$$D = (a_{r1} + b_{r1}) A_{r1} + \ldots + (a_{rn} + b_{rn}) A_{rn} =$$

$$= (a_{r1} A_{r1} + \ldots + a_{rn} A_{rn}) + (b_{r1} A_{r1} + \ldots + b_{rn} A_{rn}).$$

Risulta pure chiaramente che un determinante:

c) è zero se ha due linee o colonne proporzionali;

d) non si altera se agli elementi di una linea o colonna si aggiungono quelli di un' altra linea o colonna moltiplicati per un numero arbitrario ;

e) non si altera se ad una linea o colonna si aggiunge la stessa funzione lineare delle altre linee o colonne;

f) è nullo se gli elementi corrispondenti in un certo numero di linee o colonne soddisfano a una stessa equazione lineare omogenea.

6. Moltiplicazione di due determinanti.

Il prodotto di due determinanti del medesimo ordine si può esprimere mediante un determinante dello stesso ordine.

Facilmente si deduce la seguente regola di formazione del determinante prodotto:

I termini della prima linea si formano facendo la somma dei prodotti degli elementi della prima linea di uno dei determinanti dati, per gli elementi della prima, seconda, ecc., n^{esima} linea dell' altro determinante; intendendo di moltiplicare fra loro solo gli elementi che occupano posti omonimi nelle due linee; così i termini della seconda linea si formano facendo la somma dei prodotti degli elementi della seconda linea del primo, per gli elementi della prima, seconda, ecc., n^{esima} linea dell' altro, e così di seguito.

Se i determinanti da moltiplicarsi non sono dello stesso ordine, si riducono.

7. Matrici.

Se si hanno mn numeri qualunque (*elementi*) disposti in m linee di n numeri ciascuna, lo specchio

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

che ne risulta dicesi *matrice*.

Essendo $m \gtrless n$, sopprimendo $m-n$ linee o $n-m$ colonne, a piacere, si ottengono dalla matrice *rettangolare* tante matrici *quadrate* che, evidentemente, sono determinanti.

E chiaro che il numero di essi nel caso di $m > n$ è dato da

$$\binom{m}{n}.$$

Essi sono d' ordine n.

CAPITOLO II.

Breve cenno sui determinanti d' ordine infinito.

Trovando, le ridotte di una frazione continua, la loro rappresentazione in un quoziente di continuanti, è evidente che volendo assurgere dalle ridotte alla frazione continua stessa, questa troverà la sua rappresentazione in un quoziente di due continuanti d' ordine infinito.

È quindi opportuno dare dei determinanti d'ordine infinito quelle proprietà fondamentali che più li caratterizzano.

Noi abbiamo creduto nella presente esposizione di fermarci al criterio di convergenza di un determinante d' ordine infinito come quello che trova la sua applicazione per stabilire la convergenza delle frazioni continue: per uno studio più serio e profondo rimandiamo il lettore alla pregiata memoria del Cazzaniga già accennata antecedentemente nell' introduzione a questo libro.

1. Definizioni.

a) Sia

$$a_{ik} \qquad (i, k = -\infty \ldots +\infty)$$

un gruppo doppiamente infinito di quantità reali o complesse.

Se si forma la matrice con la legge ordinaria si ottiene una tabella

di numeri composta di infinite linee e di infinite colonne che si chiamerà per definizione *determinante d' ordine infinito.*

b) Se il determinante

$$D_{m,n} = [a_{ik}] \qquad (i, k = -n \ldots + m)$$

per valori indefinitamente crescenti di m ed n tende ad un limite unico e determinato D, questo limite si indicherà con

$$D = [a_{ik}] \qquad (i, k = -\infty \ldots + \infty)$$

e si dirà che il determinante infinito è *convergente* ed ha per valore D.

Se il limite manca esso è *divergente*, se cambia con la legge con la quale m ed n tendono all' infinito, esso è *indeterminato.*

c) Dal criterio generale per la ricerca del limite di una funzione a due variabili m ed n si ha che

il determinante

$$D_{m,n} = [a_{ik}] \qquad (i, k = -n \ldots + m)$$

è convergente quando per ogni σ piccolo ad arbitrio si può determinare un numero N intero e positivo tale che sia

$$| D_{m+p,\, n+q} - D_{m,n} | < \sigma$$

per tutti i valori di m, n maggiori di N e per qualsivogliano valori interi e positivi di p e q.

Fissato l' esistenza del limite per determinarlo è indifferente la legge con la quale si farà tendere m ed n all' infinito.

In particolare potremo porre

$$m = n \quad , \quad D_{m,n} = D_m$$

e determinare

$$D = \lim D_m$$

d) Nel determinante D chiameremo *diagonale principale* la diagonale degli elementi a_{ii} (detti *diagonali*): gli elementi a_{ik} li chiameremo *non-diagonali*. L' elemento a_{00} che si fissa per la ricerca del limite chiamasi *origine*.

e) Un determinante è definito quando conoscendo la matrice dei suoi elementi è fissata l' origine e la diagonale principale.

2. Proprietà generali dei determinanti convergenti.

a) Il valore di un determinante convergente non cambia quando si prenda per origine un elemento diagonale arbitrario.

Se D è convergente si ha

$$| D_{m+p,\, n+q} - D_{m,\, n} | < \sigma$$

per m, $n > N$ e p, q interi.

Sia D' il determinante che si ottiene da D scegliendo come origine l' elemento $a_{\lambda\lambda}$. Se presi $m, n > \lambda$ si pone

$$m - \lambda = m_1 \quad , \quad n + \lambda = n_1$$

la precedente disuguaglianza diventa:

$$D'_{m_1+p,\, n_1+q} - D'_{m_1,\, n_1} | < \sigma$$

quindi D' è convergente per m_1, $n_1 > N + \lambda$.

Da ciò risulta essere D limite, per m tendente all'infinito, tanto di

$$D_m = D_{m,\, n}$$

quanto di

$$\Delta_m = D_{m-\lambda,\, m+\lambda} .$$

Ma con la successione

$$D_0 \; , \; D_1 \; , \; . \; . \; . \; , \; D_m \; . \; . \; .$$

definisce un limite D, così la successione

$$\Delta_0, \Delta_1, \ldots \Delta_m, \ldots$$

definisce un limite D', quindi, poichè il limite è unico:

$$D = D'.$$

Quindi

un determinante convergente è definito dalla matrice e dalla sua diagonale.

b) Un determinante convergente non muta di valore se si scambiano le linee con le colonne purchè si conservi nel nuovo determinante la diagonale principale del primitivo.

Sia D il determinante dato e D' quello ottenuto collo scambio delle linee e colonne.

Sia a_{00} l' origine comune.

Evidentemente è

$$| D_{m+p, n+q} - D_{m, n} | < \sigma$$

da cui

$$| D'_{m+p, n+q} - D'_{m, n} | < \sigma \quad :$$

perciò D' è convergente.

Allora per ogni σ piccolo ad arbitrio si può sempre determinare un numero intero N tale che per ogni m, $n > N$ si abbia contemporaneamente

$$| D - D_{m, n} | < \frac{\sigma}{2} \, , \quad | D' - D'_{m, n} | < \frac{\sigma}{2} \; .$$

Ma essendo

$$D_{m, n} = D'_{m, n}$$

risulta

$$| D - D' | = | (D - D_{m, n}) - (D' - D'_{m, n}) | < \sigma$$

dunque

$$D = D' \qquad \text{c. d. d.}$$

c) In un determinante convergente scambiando fra loro due linee o due colonne, il determinante cambia segno.

Siano D e D' i determinanti che si ottengono l'uno dall'altro collo scambio di due colonne. Si assuma la stessa origine.

Essendo, pei valori di m, n opportunamente grandi e per quelli maggiori,

$$D_{m,n} + D'_{m,n} = 0$$

resta subito dimostrata la convergenza di D'.

Ma per ogni σ piccolo a piacere è possibile fissare un intero N positivo tale che per ogni m, $n > N$ si abbia

$$|D - D_{m,n}| < \frac{\sigma}{2}, \quad |D' - D'_{m,n}| < \frac{\sigma}{2} :$$

da cui facilmente

$$|(D + D') - (D_{m,n} + D'_{m,n})| < \sigma$$

e quindi

$$|D + D'| < \sigma$$

$$D = -D' \qquad \text{c. d. d.}$$

d) Segue subito:

Se in un determinante convergente due linee o due colonne sono uguali, il determinante è nullo.

e) Ogni determinante convergente di cui gli indici delle linee o delle colonne si estendono da $-\infty$ a $+\infty$ può essere trasformato in un nuovo convergente per il quale i detti indici si estendono da 1 a $+\infty$.

Nel determinante

$$D = [a_{ik}] \qquad (i, k = -\infty \ldots +\infty)$$

si trasportino tutte le linee e colonne di indice negativo rispettivamente al disotto e a destra delle linee e colonne di indice zero, per modo che nel nuovo determinante la successione

$$1, 2, 3, \ldots, 2n, 2n+1 \ldots$$

delle sue linee o colonne sia data dalla successione

$$0, -1, 1, \ldots, -n, n, \ldots$$

delle linee o colonne di D.

Si avrà quindi

$$D' = [b_{ik}] \qquad (i, k = 1 \ldots +\infty),$$

esso pure convergente, come risulta in modo analogo a quanto s'è fatto nei teoremi precedenti. E poichè il determinante D'_m ammette un limite per m crescente all'infinito, questo limite sarà lo stesso qualunque sia la legge con la quale si fa crescere m. Ponendo allora:

$$m = 2n + 1,$$

si potrà sempre fissare per ogni σ arbitrario, un numero intero positivo N', in modo che per tutti i valori di $n > N'$ sia

$$|D' - D'_{2n+1}| < \frac{\sigma}{2}$$

Ma per una scelta opportunamente grande di n:

$$|D - D_{n,n}| < \frac{\sigma}{2}$$

è poichè

$$D'_{2n+1} = D_{n,n},$$

procedendo come dianzi risulta

$$D = D' \qquad \text{c. d. d.}$$

Con facili considerazioni si dedurrebbe pure che:

se in un determinante convergente si scambiano fra di loro le linee e fra di loro le colonne per modo che gli elementi diagonali rimangono tali, il determinante non muta di valore;

comunque si scambino fra loro linee e colonne di un determinante divergente o indeterminato, esso non potrà mai trasformarsi in un convergente.

f) Se si moltiplicano tutti gli elementi di una linea o colonna di un determinante convergente per un numero finito k, il determinante resta moltiplicato per k.

Dato D, sia D' il determinante che si ottiene da D moltiplicando per k gli elementi della α^{esima} linea. È chiaro che la convergenza di D porta quella di D'. Ne consegue che per ogni δ piccolo a piacere si può sempre determinare un intero $m' > \alpha$ tale che per $m > m'$ sia

$$k \,|\, D - D_m \,| < k\delta \quad , \quad |\, D' - D'_m \,| < \delta \quad , \quad k D_m = D'_m$$

Ma

$$k \,|\, D - D' \,| = |\,(k D - k D_m) - (D' - D'_m)\,| < k \,|\, D - D_m \,| + |\, D' - D'_m \,|$$

onde

$$|\, k D - D' \,| < \delta (k + 1)$$

e posto

$$\delta < \frac{\sigma}{k+1}$$

risulta

$$|\, k D - D' \,| < \sigma$$

e quindi

$$k D = D'.$$

g) Segue subito, pel principio del comma *d*), che

un determinante è nullo identicamente se ha
gli elementi di una linea o colonna equimultipli di quelli d' una linea o colonna parallela;
un linea o colonna di zeri.

Mediante una semplice e chiara dimostrazione si potrebbe poi generalizzare il teorema del comma *f*) come segue:

Se in un determinante convergente si moltiplicano le linee per delle quantità μ_i ($i = 1, 2, \ldots \infty$) e le colonne per delle quantità ν_i ($i = 1, 2, \ldots \infty$) tali che i prodotti infiniti

$$p = \prod_i \mu_i \qquad q = \prod_i \nu_i$$

siano assolutamente convergenti e diversi da zero, il determinante D' che ne risulta è ancora convergente ed uguale in valore al primitivo moltiplicato per $\prod_i (\mu_i \nu_i)$.

3. Determinanti normali.

Dicesi della *forma normale* ogni determinante infinito tale che il prodotto degli elementi diagonali sia convergente assolutamente e sia pure convergente assolutamente la serie doppia degli elementi non diagonali.

4. Criteri di convergenza.

a) Ogni determinante di forma normale è convergente.

Pongasi

$$a_{ik} = a'_{ik} \qquad \text{per } i \neq k$$

$$a_{ii} = 1 + a'_{ii} \qquad \text{per } i = k$$

La convergenza assoluta del prodotto infinito

$$\prod_i (1 + a'_{ii}) \qquad (i = 1, 2, \ldots \infty)$$

equivale a quella della serie semplice

$$\sum_i a_{ii} \quad ;$$

e convergendo la serie doppia degli elementi non diagonali, converge pure la serie

$$\sum_i \sum_k | a_{ik} |$$

e quindi anche il prodotto

$$\overline{P} = \prod_i (1 + \sum_k | a'_{ik} |)$$

Si noti poi che il determinante

$$D_m = [a_{ik}] \qquad (i, k = 1 \ldots m),$$

si può ottenere dal prodotto:

$$\overline{P}_m = \prod_1^m \left(1 + \sum_1^m | a_{ik} | \right) \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

sviluppandolo e ponendo opportunamente a coefficienti dei vari termini i numeri $+1$, -1, 0.

Si ha quindi

$$| D_m | < \overline{P}_m$$

poichè ad ogni termine di D_m corrisponde un termine di $\overline{P}_m$ uguale ad esso in valore assoluto e sempre positivo.

Formiamo ora le espressioni

$$D_{m+p}, \qquad \overline{P}_{m+p} \quad ;$$

se in esse sostituiamo lo 0 alle quantità a'_{ik} per $i, k = m+1, m+2, \ldots m+p$ otteniamo

$$D_m \quad , \quad \overline{P}_m$$

e fra i termini che si annullano in $\overline{P}_{m+p}$ si trovano certo quelli che si annullano in D_{m+p}.

Ma i termini che vanno a zero nel detto prodotto sono

$$\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m \quad ,$$

quelli che vanno a zero nel corrispondente determinante sono

$$D_{m+p} - D_m \quad ,$$

e inoltre tutti i termini della prima differenza sono positivi il che, in generale, non avviene di quelli della seconda, quindi:

$$| D_{m+p} - D_m | < \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m \ .$$

Ma $\overline{P}$ è convergente, onde per ogni σ piccolo ad arbitrio si potrà fissare un intero m' positivo tale che per tutti gli $m > m'$ e per qualunque p si abbia

$$\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m < \sigma$$

da cui evidentemente

$$| D_{m+p} - D_m | < \sigma \qquad \text{c. d. d.}$$

Un caso particolare è dato da

$$a_{ii} = 1 \ .$$

È chiaro sin d'ora che la condizione di essere normale, per un determinante infinito, è sufficiente, ma non necessaria per stabilirne la convergenza.

Pei determinanti normali, in virtù della loro convergenza, valgono tutti i teoremi generali soprannunciati.

b) Si dimostra pure che:

Un determinante normale resta convergente se al posto degli elementi di una sua linea si pone una successione di ele-

menti a_{ii} i quali, in valore assoluto, non superino un numero positivo dato a.

Questo può essere generalizzato come segue:

Se in un determinante normale al posto degli elementi di un numero qualsivoglia, ma finito, di lince, si pongono altri elementi ad arbitrio, ma inferiori in valore assoluto ad un certo numero positivo finito a, il nuovo determinante è ancora convergente.

CAPITOLO III.

Continuanti.

1. Definizione.

a) Dicesi *continuante* un determinante che ha gli elementi, posti al di fuori della diagonale principale e delle due diagonali minori confinanti, ciascuno uguale a zero e che ha gli elementi di una di queste diagonali minori ciascuno uguale all' unità negativa.

Così

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}$$

è un continuante del 4.° ordine.

Se le b_i sono unità positive il continuante dicesi *semplice*. Di quantità arbitrarie in questo non notansi quindi che gli elementi della diagonale principale ed esso si presenta perciò sotto la forma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}$$

b) Essendo un continuante, evidentemente, una funzione degli elementi della diagonale principale e della diagonale minore lo indicheremo per semplicità di scrittura con l' espressione

$$\begin{pmatrix} & b_1 & & b_2 \ldots b_{n-2} & & b_{n-1} & \\ a_1 & & a_2 & \ldots\ldots\ldots & a_{n-1} & & a_n \end{pmatrix}.$$

e nel caso di un continuante semplice porremo semplicemente

$$(a_1 a_2 \ldots a_n).$$

2. Proprietà generali e teoremi sui continuanti.

Nell' esposizione della maggior parte delle seguenti proprietà e teoremi sui continuanti ci limiteremo alla loro espressione algebrica essendo inopportuno, per l' evidenza di questa, il darne anche le rispettive proposizioni.

a) Dato il continuante

$$\begin{pmatrix} & b_1 & & b_2 \ldots b_{n-1} & \\ a_1 & & a_2 & \ldots\ldots\ldots & a_n \end{pmatrix}$$

si ha chiaramente dalla trasposizione di linee e colonne

$$\begin{pmatrix} & b_1 & & b_2 \ldots b_{n-1} & \\ a_1 & & a_2 & \ldots\ldots\ldots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & b_{n-1} & & b_{n-2} \ldots b_1 & \\ a_n & & a_{n-1} & \ldots\ldots\ldots & a_1 \end{pmatrix}$$

b) Facilmente si ha pure che il continuante

$$\begin{pmatrix} & b_1 & & b_2 \ldots b_{n-1} & \\ -a_1 & & -a_2 & \ldots\ldots\ldots & -a_n \end{pmatrix}$$

soddisfa all' uguaglianza

$$\left(\begin{matrix} & b_1 & \dots & b_{n-1} & \\ -a_1 & & -a_2 \,\dots & & -a_n \end{matrix}\right) = (-1)^n \left(\begin{matrix} & b_1 & \dots & b_{n-1} & \\ a_1 & & a_2 \,\dots & & a_n \end{matrix}\right).$$

c) Applicando la regola di Laplace allo sviluppo del continuante

$$\left(\begin{matrix} & b_1 & \dots\dots\dots\dots & b_{n-1} & \\ a_1 & & a_2 \,\dots\, a_p \,\dots\, a_{n-1} & & a_n \end{matrix}\right)$$

esso si trasforma evidentemente nell' espressione

$$\left(\begin{matrix} & b_1 & \dots & b_{p-1} & \\ a_1 & & a_2 \,\dots & & a_p \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} & b_{p+1} & \dots & b_{n-1} & \\ a_{p+1} & & \dots\dots & & a_n \end{matrix}\right) +$$

$$+ b_p \left(\begin{matrix} & b_1 & \dots & b_{p-2} & \\ a_1 & & a_2 \,\dots & & a_{p-1} \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} & b_{p+2} & \dots & b_{n-1} & \\ a_{p+2} & & \dots\dots & & a_n \end{matrix}\right);$$

in particolare

$$\left(\begin{matrix} & b_1 & \dots & b_{n-1} & \\ a_1 & & a_2 \,\dots & & a_n \end{matrix}\right) = a_1 \left(\begin{matrix} & b_2 & \dots & b_{n-1} & \\ a_2 & & a_3 \,\dots & & a_n \end{matrix}\right) + b_1 \left(\begin{matrix} & b_3 & \dots & b_{n-1} & \\ a_3 & & a_4 \,\dots & & a_n \end{matrix}\right).$$

d) In un continuante si possono a piacere scambiare gli elementi b_i colle loro unità negative contrapposte, come del pari si possono scambiare i segni.

Infatti, facilmente si verifica la seguente uguaglianza:

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \dots 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 \dots 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots b_n & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ -b_2 & a_2 & b_3 \dots 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots -b_n & a_n \end{vmatrix}$$

e) Dato un continuante

$$\begin{pmatrix} & b_2 & & b_3 & \ldots & b_n & \\ a_1 & & a_2 & \ldots & \ldots & & a_n \end{pmatrix}$$

se si pone

$$MN = -b_2$$

$$PQ = -b_3$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$YZ = -b_n$$

si ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 \ldots 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_n & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & M & 0 \ldots 0 & 0 \\ N & a_2 & P \ldots 0 & 0 \\ 0 & Q & a_3 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots Z & a_n \end{vmatrix}$$

Se ne omette per semplicità la dimostrazione.

f) Del pari è evidente che se si pone

$$M = -N = -\sqrt{b_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y = -Z = -\sqrt{b_n}$$

si ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & -\sqrt{b_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{b_2} & a_2 & -\sqrt{b_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & a_3 & -\sqrt{b_4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_4} & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{b_n} & a_n \end{vmatrix}$$

in cui è

$$a_{ki} = -a_{ik} \, ,$$

vale a dire si ha un continuante *gobbo.*

g) Un continuante può essere trasformato, a meno di un fattore, in un continuante gobbo avente gli elementi della diagonale principale uguali fra loro.

Infatti, si ottiene, dietro ad alcune lecite trasformazioni:

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix} =$$

$$
= \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{P^n}
\begin{vmatrix}
P & -P\sqrt{\frac{b_2}{a_1 a_2}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
P\sqrt{\frac{b_2}{a_1 a_2}} & P & -P\sqrt{\frac{b_3}{a_2 a_3}} & \ldots & 0 & 0 \\
0 & P\sqrt{\frac{b_3}{a_2 a_3}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & P\sqrt{\frac{b_n}{a_{n-1} a_n}} & P
\end{vmatrix}
$$

h) Facilmente si riscontra che quest' ultimo continuante si può esprimere mediante la serie

$$P^n + P^{n-2}\Sigma D_2 + P^{n-4}\Sigma D_4 + \ldots$$

in cui i coefficienti delle potenze di P sono somme di quadrati, essendo i D_i determinanti aventi gli elementi della diagonale principale uguali a zero, ossia determinanti così detti *gobbo simmetrici* o *emisimmetrici.*

Nel caso di $P = 1$ si avrebbe

$$1 + \Sigma' Q + \Sigma'' Q + \ldots$$

che non è se non l' espressione letterale del seguente teorema sui determinanti gobbi:

Ogni determinante gobbo di cui gli elementi principali sono uguali ad 1 è una somma di quadrati.

i) Ogni continuante, che si trovi sotto la forma generale, può essere espresso, a differenza d' un fattore, mediante un continuante semplice.

Infatti, dividendo la seconda colonna pel primo elemento di essa che non è zero e moltiplicando poi per questo stesso elemento la terza

linea e continuando così per le rimanenti linee e colonne successive, si ha:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_5 \end{vmatrix} = b_2 b_4 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 \frac{1}{b_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 \frac{b_1}{b_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \frac{b_2}{b_1 b_3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_5 \frac{b_1 b_2}{b_2 b_4} \end{vmatrix}$$

e così generalmente

$$\left(\begin{matrix} & b_1 & \ldots & b_{n-1} & \\ a_1 & & a_2 \; \ldots & & a_n \end{matrix}\right) = \left(a_1 \quad a_2 \frac{1}{b_1} \quad a_3 \frac{b_1}{b_2} \; \ldots \; a_n \frac{b_{n-4} b_{n-2}}{b_{n-3} b_{n-1}} \right) \ldots b_{n-3}\, b_{n-1}$$

3. Casi particolari.

a) Supponiamo d' avere il continuante

$$\left(\begin{matrix} & \omega + a_1 x & & \omega + a_2 x & & \ldots & \\ a_1 + x & & a_2 & & a_3 & \ldots & a_n \end{matrix}\right).$$

Se si crescono gli elementi delle linee prima, seconda, ecc. di x volte i corrispondenti elementi delle linee seconda, terza, ecc. e se nel determinante che si ottiene si diminuiscono gli elementi della 2.ª colonna di x volte i corrispondenti elementi della prima, quelli della terza di x volte i corrispondenti della nuova seconda colonna e così via si ottiene

$$\left(\begin{matrix} & \omega + a_1 x & & \omega + a_2 x & & \ldots & \\ a_1 + x & & a_2 & & a_3 & \ldots & a_n \end{matrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{matrix} & \omega + a_2 x & & \omega + a_3 x & \ldots & \\ a_1 & & a_2 & \ldots\ldots\ldots & & a_n + x \end{matrix}\right).$$

Questo può enunciarsi così:

Se, in ogni continuante, il rapporto della differenza fra un elemento della diagonale minore e il suo precedente, alla simile differenza nel caso degli elementi della diagonale principale che occupano le stesse linee, è costante — eccettuato il caso in cui entra il primo elemento della diagonale principale, nel qual caso si avrebbe la stessa proprietà se questo elemento fosse diminuito della costante a lui riferita — si può, senza alterare il suo valore, diminuire il primo elemento della diagonale principale, e contemporaneamente accrescerne l' ultimo, della costante e avanzare di un posto gli elementi della diagonale minore, mettendo nell' ultimo posto vacante l' elemento della diagonale minore che avrebbe avuto il continuante se fosse stato di ordine immediatamente superiore.

b) Veniamo alla generalizzazione di questo teorema.

Considerando il continuante

$$\left(\begin{matrix} & b_1 c_1 & & b_2 c_2 & & \cdots\cdots & \\ \delta + \frac{b_1}{r} & & \delta + \frac{b_2}{r} - c_1 r & & \delta + \frac{b_3}{r} - c_2 r & \cdots & \delta + \frac{b_n}{r} - c_{n-1} r \end{matrix}\right)$$

sotto la forma

$$\begin{vmatrix} \delta + \frac{b_1}{r} & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_1 & \delta + \frac{b_2}{r} - c_1 r & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_2 & \delta + \frac{b_3}{r} - c_2 r & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta + \frac{b_n}{r} - c_{n-1} r \end{vmatrix}$$

si applichi ad esso lo stesso processo di trasformazione usato pel teorema precedente, essendo r il fattore moltiplicatore.

Si ottiene evidentemente:

$$\left(\begin{matrix} & b_1 c_1 & & b_2 c_2 & \dots\dots & b_{n-1} c_{n-1} & \\ \delta + \frac{b_1}{r} & & \delta + \frac{b_2}{r} - c_1 r & & \delta + \frac{b_3}{r} - c_2 r \;\; \dots & & \delta + \frac{b_n}{r} - c_{n-1} r \end{matrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{matrix} & b_2 c_1 & & b_3 c_2 \;\dots\; b_n c_{n-1} & \\ \delta + \frac{b_1}{r} - c_1 r & & \delta + \frac{b_2}{r} - c_2 r & \dots\dots\dots & \delta + \frac{b_n}{r} \end{matrix}\right).$$

Ponendo

$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots\dots = 1 \qquad \text{e} \qquad \delta - r = \beta$$

si ha

$$\left(\begin{matrix} & b_1 & & b_2 \;\dots & \\ \beta + \frac{b_1}{r} + r & & \beta + \frac{b_2}{r} & \dots & \beta + \frac{b_n}{r} \end{matrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{matrix} & b_2 & & b_3 \;\dots\; b_n & \\ \beta + \frac{b_1}{r} & & \beta + \frac{b_2}{r} & \dots & \beta + \frac{b_n}{r} + r \end{matrix}\right)$$

che non è che il teorema precedente.

c) Se si considera il continuante

$$(a_1 x^{-1} \;\; a_2 x^{(-1)^2} \;\; a_3 x^{(-1)^3} \;\dots\dots\; a_n x^{(-1)^n})$$

si vede, seguendo lo stesso procedimento tenuto nel comma i) del numero 2 di questo capitolo, che esso si riduce evidentemente al continuante

$$(a_1 \;\; a_2 \;\dots\dots\; a_n)$$

se n è pari, e al continuante

$$(a_1 \;\; a_2 \;\dots\dots\; a_n)\, x^{-1}$$

se n è dispari.

d) Si consideri ora il continuante semplice della forma

$$(1 \;\; a_1 \;\; a_2 \ldots\ldots a_n)\,.$$

Sottraendo gli elementi della prima colonna dai corrispondenti elementi della seconda si ottiene:

$$(1 \;\; a_1 \;\; a_2 \ldots\ldots a_n) = (a_1 + 1 \;\; a_2 \ldots\ldots a_n)$$

e) Coll'aiuto dei teoremi dati nel comma *c*) del numero 2, si vede pure essere

$$(0 \;\; a_2 \ldots\ldots a_n) = (a_3 \;\; a_4 \ldots\ldots a_n)$$

$$(\ldots a \;\; b \;\; c \;\; 0 \;\; f \;\; g \ldots) = (\ldots a \;\; b \;\; c+f \;\; g \ldots)$$

$$(\ldots a \;\; b \;\; c \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; e \;\; f \ldots) = (\ldots a \;\; b \;\; c+e \;\; f \ldots)$$

e così via in generale quando il numero degli zeri consecutivi è dispari.

Quando invece il numero degli zeri consecutivi è pari si ottengono le seguenti uguaglianze:

$$(0 \;\; 0 \;\; a_3 \ldots\ldots a_n) = (a_3 \ldots\ldots a_n)$$

$$(\ldots a \;\; b \;\; 0 \;\; 0 \;\; e \;\; f \ldots) = (\ldots a \;\; b \;\; e \;\; f \ldots)\,.$$

f) Il teorema del comma *d*) del presente numero si può applicare, nel caso generale, per dimostrare che certi continuanti si possono trasformare in prodotto di fattori.

Infatti essendo

$$\left({}_{ma_1} {}^{mb_1} {}_{a_2} {}^{b_2 \ldots b_{n-1}}_{\ldots\ldots} {}_{a_n} \right) = m \left({}_{a_1} {}^{b_1 \ldots b_{n-1}}_{\ldots\ldots} {}_{a_n} \right)$$

e

$$\left({}_{1} {}^{b_1 \ldots\ldots b_n}_{a_1 \ldots\ldots} {}_{a_n} \right) = \left({}_{a_1 + b_1} {}^{b_2 \ldots\ldots b_n}_{a_2 \ldots\ldots} {}_{a_n} \right)$$

si ottiene tosto del continuante

$$\left(\begin{matrix} & b_1 & & (b_1+a_1)b_2 & & (b_2+a_2)b_3 & \dots & (b_{n-1}+a_{n-1})b_n & \\ 1 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & \dots\dots\dots & a_n \end{matrix}\right)$$

la seguente espressione:

$$\left(\begin{matrix} & b_1 & & (b_1+a_1)b_2 & & (b_2+a_2)b_3 \dots & \\ 1 & & a_1 & & a_2 & \dots\dots\dots\dots & a_n \end{matrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{matrix} & b_1+a_1 & & (b_2+a_2)b_3 \dots & \\ b_1+a_1 & & a_2 & \dots\dots\dots\dots & a_n \end{matrix}\right)=$$

$$=(b_1+a_1)\left(\begin{matrix} & b_2 & & (b_2+a_2)b_3 & \dots\dots & \\ 1 & & a_2 & & a_3 \dots & a_n \end{matrix}\right)$$

da cui evidentemente

$$(b_1+a_1)(b_2+a_2)(b_3+a_3)\dots\dots(b_n+a_n).$$

g) Supponiamo ora che i continuanti siano tali che le loro diagonali lette per un senso o pel senso opposto siano le stesse.

Allora per questi continuanti, nel caso che essi siano semplici, si hanno le presenti identità:

$$(a_1\ a_2 \dots a_{n-1}\ a_n\ a_{n-1} \dots a_2\ a_1)=$$

$$=(a_1\ a_2 \dots a_{n-1})\{(a_1\ a_2 \dots a_{n-2})+(a_1\ a_2 \dots a_n)\};$$

$$(a_1\ a_2 \dots a_n\ a_n \dots a_2\ a_1)=(a_1 \dots a_{n-1})^2+(a_1 \dots a_n)^2;$$

$$a_n(a_1\ a_2 \dots a_{n-1}\ a_n\ a_{n-1} \dots a_2\ a_1)=(a_1 \dots a_n)^2-(a_1 \dots a_{n-2})^2;$$

$$(a_1 \dots a_{n-1}\ 2a_n\ a_{n-1} \dots a_1)=2(a_1 \dots a_{n-1})(a_1 \dots a_n).$$

4. Sviluppo di un continuante semplice.

Per lo sviluppo di un continuante semplice è bene seguire per maggior facilità e prontezza la seguente regola:

Lo sviluppo di

$$(a_1 \quad a_2 \ldots . a_n)$$

si ha sommando col prodotto $a_1 a_2 \ldots . . a_n$ tutti i termini che si ottengono dividendo questo stesso prodotto per tutte le coppie, o numero di coppie, di elementi consecutivi della serie $a_1, a_2, \ldots . a_n$.

Così è

$$(a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 +$$

$$+ a_1 a_2 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5 .$$

5. Numero dei termini di un continuante.

Si voglia ora calcolare il numero dei termini che contiene un continuante della forma generale.

Abbiasi, ad esempio, il continuante del quarto ordine

$$\left(a_1 \overset{b_2}{\;} a_2 \overset{b_3}{\;} a_3 \overset{b_4}{\;} a_4 \right)$$

il cui sviluppo, come sappiamo, è il seguente:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 + b_3 a_1 a_4 + b_4 a_1 a_2 + b_2 a_3 a_4 + b_2 b_4$$

Ora, se noi sostituiamo, al posto di ogni elemento a_i e b_i l'unità, i termini dello sviluppo del nuovo continuante diventano tutti uguali all'unità stessa e si ha quindi, in ultima analisi, un numero intero rappresentante il numero dei termini del continuante generale.

Si dirà, in generale, che il numero dei termini del continuante d' ordine n è rappresentato da

$$c_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Applicando la formola che ci dà lo sviluppo di un continuante secondo gli elementi della prima linea si ha, nel caso speciale del continuante scritto sopra, che

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2} .$$

Questa ci dice che i numeri c_i formano una serie di numeri interi ognuno dei quali è uguale alla somma dei due precedenti.

Questa serie è la serie cosidetta di Fibonacci.

6. Convergenza di un continuante di ordine infinito.

Si abbia il continuante d' ordine infinito

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots \\ -\beta_1 & 1 & \alpha_2 & 0 & \ldots \\ 0 & -\beta_2 & 1 & \alpha_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots ; \beta_1, \beta_2 \ldots$ essendo quantità qualunque, e si cerchi quali debbono essere le condizioni a cui deve soddisfare affinchè sia convergente.

Ricordando che « se la serie doppia

$$\Sigma \mid a_{ij} \mid ,$$

dove i è diverso da j, è convergente, allora il determinante in cui gli elementi principali sieno uguali ad 1 è convergente » il nostro continuante sarà convergente solo quando sia convergente

$$\Sigma \mid \alpha_i \mid + \Sigma \mid \beta_i \mid$$

ossia quando sono convergenti rispettivamente

$$\Sigma \mid \alpha_i \mid \quad \text{e} \quad \Sigma \mid \beta_i \mid .$$

E ricordando nuovamente che « se due serie

$$s = \Sigma u_n \quad \text{e} \quad t = \Sigma v_n$$

sono assolutamente convergenti, la serie

$$\sigma = \Sigma u_k v_k$$

formata dai prodotti a due a due dei loro termini, scritti in ordine qualunque, sarà assolutamente convergente e avrà per somma $s t$ » [1] si concluderà dicendo che il nostro continuante sarà convergente quando è convergente la serie

$$\mid \alpha_1 \beta_1 \mid + \mid \alpha_2 \beta_2 \mid + \mid \alpha_3 \beta_3 \mid + \ldots\ldots$$

[1] Jordan Vol. I. p. 279.

CAPITOLO IV.

Connessione fra Continuanti e Frazioni continue.

1. Espressione delle ridotte delle frazioni continue per mezzo dei continuanti.

L'espressione delle ridotte delle frazioni continue per mezzo dei continuanti è basata sul seguente

a) **Teorema**: Data la frazione continua sotto la forma generale

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \cdots,$$

se P_n è il numeratore e Q_n il denominatore della sua n^{esima} ridotta, si ha sempre, essendo $M, N, \ldots\ldots P, S,$ numeri arbitrari che si possono ridurre anche a zero,

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & M & N \dots P & S \\ 0 & a_2 & -1 \dots 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \dots 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 \dots 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots b_n & a_n \end{vmatrix}}$$

Basta, naturalmente, dimostrare vera l' uguaglianza

$$\Delta=\left(a_1 \overset{b_2}{\ } a_2 \overset{b_3}{\ } a_3 \overset{b_4}{\ } \dots \dots \overset{b_n}{\ } a_n\right)=Q_n,$$

risultando pel numeratore una dimostrazione del tutto analoga.

Suppongasi che questa uguaglianza valga per tutti i denominatori fino a quello dell' $n-1^{esimo}$ ordine, vale a dire suppongasi che sia

$$Q_{n-2}=\left(a_1 \overset{b_2}{\ } a_2 \overset{b_3}{\ } a_3 \dots \overset{b_{n-2}}{\ } a_{n-2}\right)$$

e

$$Q_{n-1}=\left(a_1 \overset{b_2}{\ } a_2 \overset{b_3}{\ } a_3 \dots \overset{b_{n-1}}{\ } a_{n-1}\right).$$

Sviluppando il nostro continuante secondo gli elementi dell' ultima linea si ha:

$$\Delta = a_n \left(a_1 \overset{b_2}{\ } a_2 \overset{b_3}{\ } a_3 \overset{\cdots}{\cdots} \overset{b_{n-1}}{\ } a_{n-1} \right) + b_n \left(a_1 \overset{b_2}{\ } a_2 \overset{b_3}{\ } a_3 \overset{\cdots}{\cdots} \overset{b_{n-2}}{\ } a_{n-2} \right)$$

e confrontando quest' uguaglianza colla

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}$$

data dalla teoria delle frazioni continue, si ricava tosto

$$\Delta = \left(a_1 \overset{b_2}{\ } a_2 \overset{b_3}{\ } a_3 \overset{\cdots}{\cdots} \overset{b_n}{\ } a_n \right) = Q_n .$$

Ora essendo effettivamente

$$Q_1 = a_1 = (a_1)$$

$$Q_2 = a_1 a_2 + 1 = (a_1 a_2)$$

il nostro teorema rimane completamente dimostrato.

Quindi:

Il valore della ridotta n^{esima} della frazione continua della forma

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

può essere messo sotto la forma di un quoziente di due continuanti i quali contengano d'ambo i lati della diagonale principale una delle stesse serie parallele d'elementi.

Il continuante numeratore si ottiene differenziando parzialmente il continuante denominatore rispetto al primo quoziente incompleto e moltiplicando questo determinante minore per il primo numeratore parziale.

b) Nel caso particolare in cui le b_i siano uguali all'unità positiva si ha:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{P_n}{Q_n} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}} = \frac{(a_2\, a_3\, a_4 \dots a_n)}{(a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n)}$$

relazione che può enunciarsi così:

Il denominatore della ridotta n^{esima} di una frazione continua della forma

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$$

non è altro che il continuante semplice dell' n^{esimo} ordine avente per elementi della diagonale principale gli n quozienti incompleti della ridotta stessa.

Il numeratore è l' elemento reciproco del primo elemento della prima linea, o colonna, del continuante denominatore.

c) Si deduce anche che

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_1 \frac{\partial Q_n}{\partial a_1}}{Q_n} = b_1 \frac{\partial \log Q_n}{\partial a_1}$$

d) Per rappresentare con continuanti la frazione continua della forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

basta, evidentemente, addizionare all' espressione

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

il termine a_0.

Effettivamente il denominatore è

$$\left({}_{a_1} {}^{b_2} {}_{a_2} {}^{b_3} {}_{a_3} \begin{smallmatrix} \cdots \\ \cdots \end{smallmatrix} {}^{b_n} {}_{a_n} \right)$$

mentre il numeratore è dato dalla somma

$$\begin{vmatrix} b_1 & -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 a_0 & -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

Essendo questi due continuanti, ad eccezione della prima colonna, identici, possiamo rappresentarli più semplicemente mediante il continuante

$$\begin{vmatrix} b_1 + a_1 a_0 & -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

dal quale si può facilmente passare a quello dell' $n+1^{esimo}$ ordine

$$\begin{pmatrix} & b_1 & & b_2 & & b_3 & \dots & b_n & \\ a_0 & & a_1 & & a_2 & & \dots\dots & & a_n \end{pmatrix}.$$

e) Se la frazione continua avesse i numeratori negativi si potrebbe rappresentare come un quoziente di due continuanti simmetrici pei quali sarebbe

$$a_{ik} = a_{ki} .$$

2. Sulla relazione ricorrente

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_n .$$

a) Si dimostri ora mediante i continuanti che

se

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad \text{e} \quad \frac{P_n}{Q_n}$$

sono rispettivamente l' $n - 1^{esima}$ e l' n^{esima} ridotta della frazione continua

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \ldots + \frac{b_n}{a_n + \ldots}}}$$

si ha la relazione

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_n .$$

Infatti si ha sostituendo alle P e alle Q le loro espressioni in continuanti:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} & 0 & & b_3 & & \ldots & & b_n & \\ b_1 & & a_2 & & a_3 & & \ldots & & a_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccccccccc} & b_2 & & b_3 & & \ldots & & 0 & \\ a_1 & & a_2 & & \ldots & & a_{n-1} & & 1 \end{array}\right) -$$

$$-\left(\begin{array}{ccccccccc} & 0 & & b_3 & & \ldots & & 0 & \\ b_1 & & a_2 & & \ldots & & a_{n-1} & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccccccccc} & b_2 & & b_3 & & \ldots & & b_n & \\ a_1 & & a_2 & & \ldots & & \ldots & & a_n \end{array}\right).$$

Eseguendo i prodotti si ottiene, indicando per semplicità questa differenza con D:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 b_1 & b_1 b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2^2+1 & a_2 b_3 - a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^2_{n-1}+b^2_{n-1}+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} b_n - a_n & a_n \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} a_1 b_1 & b_1 b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2^2+1 & a_2 b_3 - a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^2_{n-1}+b^2_{n-1}+1 & a_{n-1} b_n - a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Questi determinanti sono identici ad eccezione delle ultime linee e colonne che sono fra di loro scambiate: se si indica il primo con Δ e il secondo con Δ' si ha

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_n} = \frac{\partial \Delta'}{\partial a_n}$$

Sviluppando Δ secondo gli elementi dell' ultima colonna e Δ' secondo quelli dell' ultima linea e sottraendo si ottiene:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 b_1 & b_1 b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2^2+1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^2_{n-3}+b^2_{n-3}+1 & a_{n-3} b_{n-2} - a_{n-2} & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-3} b_{n-2} - a_{n-2} & a^2_{n-2}+b^2_{n-2}+1 & a_{n-2} b_{n-1} - a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b_n & a_{n-1} b_n - a_n \end{vmatrix} -$$

$$
-\begin{vmatrix}
a_1 b_1 & b_1 b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-a_2 & a_2^2+1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a^2_{n-3}+b^2_{n-3}+1 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2} & 0 \\
0 & 0 & \dots & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2} & a^2_{n-2}+b^2_{n-2}+1 & -b_n \\
0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1}b_n-a_n
\end{vmatrix}.
$$

Esprimendo quest' uguaglianza con

$$D = \Delta'' - \Delta'''$$

si vede che Δ'' e Δ''', come i due soprastanti Δ e Δ', sono identici tranne che nelle ultime linee e colonne che sono fra loro scambiate e anche per essi si verifica

$$\frac{\partial \Delta''}{\partial (a_{n-1} b_n - a_n)} = \frac{\partial \Delta'''}{\partial (a_{n-1} b_n - a_n)}$$

Scomponendoli di nuovo per determinanti minori e sottraendoli si ottiene una differenza di due determinanti dell' $(n-2)^{esimo}$ ordine moltiplicata pel fattore b_n. Continuando analogamente la scomposizione si giunge ad un determinante del 2.° ordine

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 & b_1 b_2 \\ -b_3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 b_1 b_2 b_3$$

moltiplicato pel fattore $(-1)^{n-3} b_4 b_5 \dots b_n$ che dà appunto come si era affermato

$$D = P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \dots b_n.$$

b) Si sa che per un determinante arbitrario

$$\Delta = \Sigma \pm (a_{11} \ldots a_{nn})$$

si ha

$$\Delta = \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{nn}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} - \frac{\partial \Delta}{\partial a_{1n}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{n1}}}{\Sigma \pm a_{22} \ldots a_{n-1,\,n-1}}.$$

Supposto Δ uguale al continuante Q_n noi otteniamo del teorema precedente una dimostrazione più breve e più elegante.

Infatti risulta

$$Q_n = \frac{Q_{n-1} \frac{1}{b_1} P_n - (-1)^{n-1} b_2 b_3 \ldots b_n}{\frac{1}{b_1} P_{n-1}}$$

da cui

$$Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n.$$

Nel caso di $b_i = 1$ si ha

$$Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n = \pm 1.$$

c) **Osservazione.**

Le proposizioni delle frazioni continue ora dimostrate con l' aiuto dei continuanti ci hanno tracciato la via facile per la dimostrazione di tutte quante le proprietà delle ridotte, dimostrazione che per semplicità noi tralascieremo.

3. Alcune proprietà delle frazioni continue.

Altre varie importanti proposizioni della teoria della frazioni continue verremo qui esponendo con l' aiuto dei continuanti.

a) Si stabilirà l' uguaglianza dei continuanti

$$(m_1 \; m_2 \; . \; . \; . \; m_n)$$

$$(p_1 \; p_2 \; . \; . \; . \; p_n)$$

se sarà

$$m_\alpha = p_\alpha \qquad \text{per } \alpha = 1, 2, \ldots n\,;$$

si potrà affermare quindi che:

Due frazioni continue, di cui le serie dei numeratori sono composte d' unità, non possono essere uguali se non sono identiche.

b) Sia

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\begin{pmatrix} & 0 & & b_3 & \ldots & & \ldots & \\ b_1 & & a_2 & \ldots & a_{r-1} & \ldots & a_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & b_2 & \ldots & b_{r-1} & b_r & \ldots & b_n \\ a_1 & & a_2 & \ldots & a_{r-1} & \ldots & a_n \end{pmatrix}}$$

la ridotta n^{esima} della frazione continua

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \ldots}}$$

Evidentemente si ha

$$\frac{\begin{pmatrix} & 0 & b_3 \ldots b_{r-1} & b_r & \ldots & b_n \\ b_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{r-1} & \ldots a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & b_2 & b_3 \ldots b_{r-1} & b_r & \ldots & b_n \\ a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{r-1} & \ldots a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{M\begin{pmatrix} & 0 & b_3 \ldots b_{r-1} & b_r & \ldots & b_n \\ b_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{r-1} & \ldots a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}}{M\begin{pmatrix} & b_2 & b_3 \ldots b_{r-1} & b_r & \ldots & b_n \\ a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{r-1} & \ldots a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}}$$

da cui

$$\frac{\begin{pmatrix} & 0 & & b_3 & \dots & M b_{r-1} & & M b_r & \dots & b_n & \\ b_1 & & a_2 & & \dots\dots & & M a_{r-1} & \dots & a_{n-1} & & a_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & b_2 & & b_3 & \dots & M b_{r-1} & & M b_r & \dots & b_n & \\ a_1 & & a_2 & & \dots\dots & & M a_{r-1} & \dots & a_{n-1} & & a_n \end{pmatrix}}$$

Quindi:

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}} + \frac{b_r}{a_r} + \cdots =$$

$$= \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{M b_{r-1}}{M a_{r-1}} + \frac{M b_r}{a_r} + \cdots$$

c) Si voglia ora determinare il valore della frazione continua

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}} + \frac{0}{a_r} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

in cui l' r^{esimo} numeratore parziale è lo zero. Esprimendola in continuanti si ha

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\begin{pmatrix} & 0 & & b_3 & \dots & b_{r-1} & & 0 & & b_{r+1} \, .. \, b_n & \\ b_1 & & a_2 & & a_3 \dots & & a_{r-1} & & a_r & \dots\dots & a_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & b_2 & & b_3 \dots & & 0 & & \dots \, b_n & \\ a_1 & & a_2 & & .. \, a_{r-1} & & a_r & \dots & a_n \end{pmatrix}}.$$

Ora applicando a questi due continuanti lo sviluppo del Laplace, scegliendo per entrambi $r-1$ linee, si ha identicamente, nell' ipotesi che sia

$$\Delta = \begin{pmatrix} & b_{r+1} & \ldots\ldots & b_n & \\ a_r & & a_{r+1} & \ldots & a_n \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

$$\frac{\begin{pmatrix} & 0 & b_3 & \ldots & b_{r-1} & 0 & b_{r-1} & \ldots & b_n & \\ b_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{r-1} & a_r & \ldots & & a_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & b_2 & b_3 & \ldots & b_{r-1} & 0 & b_{r+1} & \ldots & b_n & \\ a_1 & a_2 & \ldots & & a_{r-1} & a_r & \ldots & & a_n \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} & 0 & b_3 & \ldots & b_{r-1} & \\ b_1 & a_2 & \ldots & & a_{r-1} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & b_2 & b_3 & \ldots & b_{r-1} & \\ a_1 & a_2 & \ldots & & a_{r-1} \end{pmatrix}}$$

da cui

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}} + \frac{0}{a_r} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} =$$

$$= \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}}$$

4. Trasformazione di una frazione continua in una equivalente.

Vediamo ora, con un esempio, come si possa venire al cambiamento di una frazione continua in un' altra equivalente mediante trasformazioni operate sui continuanti e sui determinanti che da questi ne risultano.

Sia la frazione continua

$$\cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{p_1}{x}}{1+\cfrac{\frac{p_2}{x}}{1+\ldots+\cfrac{\frac{p_{2n-2}}{x}}{1+\frac{p_{2n-1}}{x}}}}}$$

o ciò che è lo stesso, data una proprietà veduta antecedentemente, la frazione continua ad essa uguale

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{p_1}{1+\cfrac{p_2}{x+\cfrac{p_3}{1+\ldots+\cfrac{p_{2n-2}}{x+\cfrac{p_{2n-1}}{1}}}}}}.$$

Esprimendo questa mediante i continuanti si ha per denominatore il continuante di $2n^{esimo}$ grado

$$\left(\begin{matrix} & p_1 & & p_2 & & p_3 & & \cdots & & p_{2n-1} & \\ x & & 1 & & x & & 1 & \cdots & x & & 1 \end{matrix}\right).$$

Scambiando fra di loro la 3.ª linea con la 2.ª, la 5.ª con la 3.ª ecc. sino ad avere i termini x nelle prime n linee si ottiene, considerando i cambiamenti di segno, il determinante

$$(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & x & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Operando nello stesso modo per le colonne si ottiene il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_5 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Si addizioni alla prima linea la $(n+1)^{esima}$, alla 2.ª la $(n+2)^{esima}$ e così, in generale, all' r^{esima} la $(n+r)^{esima}$: quindi la 2.ª colonna al-l' $(n+1)^{esima}$, la 3.ª all' $(n+2)^{esima}$ e così via; si avrà:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x+p_2+p_3 & -1 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x+p_4+p_5 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & 0 & 0 \dots & & & \\ 0 & p_3 & 0 \dots & & & \\ 0 & 0 & p_5 \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & \dots 1 & 0 & 0 \\ & & & \dots 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Si moltiplichi il determinante Δ per il prodotto

$$p_2 p_4 p_6 \;\ldots\; p_{2n-2}$$

moltiplicando rispettivamente per ciascuno di questi fattori le $(n+1)^{esima}$, $(n+2)^{esima}$ ecc. linee; eseguito ciò, alle 2.ª, 3.ª, ... n^{esima} linee si tolgano rispettivamente le $(n+1)^{esima}$, $(n+2)^{esima}$ ecc. linee, si avrà:

$$\Delta = \frac{1}{p_2 \cdot\cdot p_{2n-2}} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & \ldots\ldots & & & 0 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 & -1 & \ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & -p_3p_4 & x+p_4+p_5 & \ldots\ldots & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1p_2 & 0 & 0 \;.. & p_2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & p_3p_4 & 0 \;.. & 0 & p_4 & .. & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \;.. & 0 & 0 & .. & p_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Un ragionamento analogo ci porta alla seguente uguaglianza:

$$\Delta = \frac{1}{p_1 p_2 \cdot\cdot p_{2n-2}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & \ldots\ldots & & & 0 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 & -1 & \ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & -p_3p_4 & x+p_4+p_5 & \ldots\ldots & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & & x+p_{2n-2}+p_{2n-1} & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 \ldots\ldots & & 0 & p_1p_2 & 0 & .. & 0 \\ 0 \ldots\ldots & & 0 & 0 & p_3p_4 & . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots\ldots & & & & & & p_{2n-3}p_{2n-2} \end{vmatrix}$$

E mediante il teorema di Laplace si ottiene, dopo alcune semplificazioni,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ -p_1 p_2 & x+p_2+p_3 & -1 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & -p_3 p_4 & x+p_4+p_5 & \dots\dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -p_{2n-3}p_{2n-2} & x+p_{2n-2}+p_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Procedendo col numeratore come si è proceduto col denominatore si vede che è

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{\frac{p_1}{x}}{1+\frac{\frac{p_2}{x}}{1+\dots+\frac{p_{2n+1}}{x}}}} =$$

$$= \frac{1}{x+p_1} - \frac{p_1 p_2}{x+p_2+p_3} - \dots - \frac{p_{2n-1}p_{2n}}{x+p_{2n}+p_{2n+1}}$$

verità che in modo induttivo fu affermata la prima volta dall'Heilermann. (1)

5. Derivata di una ridotta.

Si voglia ora esprimere la derivata della ridotta di una frazione continua quando tutti gli elementi sono fra loro indipendenti.

Sia la frazione

$$\frac{1}{1-\frac{\rho_1 x}{1-\frac{\rho_2 x}{2-\dots}}}$$

La ridotta n^{esima} è

(1) Zusammenhang unter den Coëfficienten zweier gleicher Kettenbrüche von verschiedener Form, Schlömilch's, Zeitschr. für Math. u. Phys. 5. Jahrg. S. 352.

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\left(\begin{matrix} & 0 & & -\rho_2 x & \ldots & -\rho_{n-1} x & \\ 1 & & 1 & \ldots & \ldots & & 1\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} & -\rho_1 x & & -\rho_2 x & \ldots & -\rho_{n-1} x & \\ 1 & & 1 & \ldots & \ldots & & 1\end{matrix}\right)}.$$

Per un teorema di Jacobi, se gli elementi del determinante

$$R=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & p_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots & p_n \end{vmatrix}$$

rappresentano tante variabili, indipendenti da 1 e dalla stessa variabile x, si ha:

$$\frac{dR}{dx}=\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial a_i}\frac{da_i}{dx}+\frac{\partial R}{\partial b_i}\frac{db_i}{dx}+\ldots\ldots+\frac{\partial R}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}\right).$$

Quindi essendo

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\rho_1} & \frac{1}{\rho_1} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\rho_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\rho_{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\rho_1} & \frac{1}{\rho_1} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\rho_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\rho_{n-1}} \end{vmatrix}}$$

si ottiene rispettivamente

$$\frac{dP_n}{dx}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\rho_2} & \frac{1}{\rho_2} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\rho_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\rho_{n-1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\rho_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\rho_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\rho_{n-1}} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\rho_1} & \frac{1}{\rho_1} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\rho_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\rho_{n-1}} \end{vmatrix},$$

e

$$\frac{dQ_n}{dx}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\rho_2} & \frac{1}{\rho_2} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\rho_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\rho_{n-1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\rho_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\rho_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\rho_{n-1}} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & -\frac{1}{\rho_1} & \frac{1}{\rho_1} & \ldots & 0 \\ 0 & x & -\frac{1}{\rho_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\rho_{n-2}} \end{vmatrix}.$$

Indicando con

$$\frac{\partial P_n}{\partial a_{ik}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q_n}{\partial a_{ik}}$$

i determinanti minori reciproci degli elementi a_{ik} nei due determinanti P_n e Q_n si ha finalmente

$$\frac{d\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)}{dx} = \frac{Q_n \sum\limits_{i-3=k-2} \frac{\partial P_n}{\partial a_{ik}} - P_n \sum\limits_{i-2=k-1} \frac{\partial Q_n}{\partial a_{ik}}}{Q_n^2}.$$

6. Sulla convergenza delle frazioni continue.

Tutto lo studio che s'è fatto sin qui ha avuto il suo fondamento nella considerazione dei valori approssimati delle frazioni continue o delle ridotte, e nella loro rappresentazione mediante i continuanti (di ordine finito).

Veniamo ora alla determinazione del valore di una frazione continua di un numero infinito di quozienti incompleti, o, in altre parole, veniamo a stabilire coi continuanti la sua condizione di convergenza.

Si abbia la frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \cdots$$

in cui le a_i e le b_i sono quantità qualunque.

La n^{esima} ridotta sarà rappresentata da

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}}$$

Supposte le b_i differenti da zero, noi possiamo trasformare i continuanti numeratore e denominatore in modo che i termini delle diagonali principali sieno uguali all' unità positiva e in tal caso si avrà:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_1}{b_1}\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{a_3}{b_3} & 1 & \frac{1}{b_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_4}{b_4} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_n}{b_n} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{a_2}{b_2} & 1 & \frac{1}{b_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_3}{b_3} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_n}{b_n} & 1 \end{vmatrix}}=\frac{a_1}{b_1}\frac{\Delta'_n}{\Delta_n}$$

Se noi consideriamo il determinante di ordine infinito

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b_1} & 0 & \dots \\ -\frac{a_2}{b_2} & 1 & \frac{1}{b_2} & \dots \\ 0 & -\frac{a_3}{b_3} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

noi vediamo che Δ_n non è che il determinante ottenuto da questo prendendo le prime n linee e le prime n colonne e Δ'_n ciò che diventa Δ_n quando gli si sopprime la prima linea e la prima colonna.

Ma, per quanto al cap. III. numero 6., il determinante soprascritto, d' ordine infinito, è convergente assolutamente allorquando la serie

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| + \left|\frac{a_3}{b_2 b_3}\right| + \left|\frac{a_4}{b_3 b_4}\right| + \dots$$

è convergente. Se questa condizione è soddisfatta allora si avrà che Δ_n e Δ'_n tenderanno per $n = \infty$ a dei limiti determinati Δ e Δ' e se Δ non è nullo la nostra frazione sarà convergente. [1]

[1] Importanti considerazioni sull' argomento e che possono avere una buona applicazione nella Matematica Superiore, trovansi nei Comptes Rendus Vol. 120. 1895. Pag. 144.

CAPITOLO V.

Irrazionali di 2.° grado.

1. Espressione di una frazione continua periodica in continuanti.

Si sa che ogni frazione continua periodica rappresenta una radice di un' equazione di 2.° grado o, come si suol dire, un irrazionale di 2.° grado.

Per la rappresentazione di uno di questi in continuanti basta quindi servirci delle già note relazioni.

Data perciò la frazione continua periodica nella sua forma generale si ha:

$$x = A + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{a_1} + \frac{b_1}{2A + x - A} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_2 & & b_1 & \\ A & & a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 & & A+x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & & b_2 & & \cdots & & b_2 & & b_1 & \\ a_1 & & a_2 & & \cdots & a_2 & & a_1 & & A+x \end{pmatrix}},$$

da cui si ottiene

$$x^2 \left(\begin{matrix} & b_2 & & \cdots & & b_2 & \\ a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_2 & & b_1 & \\ A & & a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 & & A \end{matrix} \right)$$

e per ultimo la seguente uguaglianza:

$$A + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_1 + \cfrac{b_1}{2A + \cdots}}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\begin{matrix} & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_2 & & b_1 & \\ A & & a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 & & A \end{matrix} \right)}{\left(\begin{matrix} & b_2 & & \cdots\cdots & & b_2 & \\ a_1 & & a_2 & \cdots\cdots & a_2 & & a_1 \end{matrix} \right)}}.$$

a) Da ciò che precede facilmente deducesi la seguente serie d'identità:

$$\frac{\left(\begin{matrix} & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_2 & & b_1 & \\ A & & a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 & & A \end{matrix} \right)}{\left(\begin{matrix} & b_2 & & \cdots\cdots & & b_2 & \\ a_1 & & a_2 & \cdots\cdots & a_2 & & a_1 \end{matrix} \right)} =$$

$$= \frac{\left(\begin{matrix} & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_2 & & b_1 & & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_2 & & b_1 & \\ A & & a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 & & 2A & & a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 & & A \end{matrix} \right)}{\left(\begin{matrix} & b_2 & & \cdots & & b_2 & & b_1 & & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_2 & \\ a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 & & 2A & & a_1 & & a_2 & \cdots & a_2 & & a_1 \end{matrix} \right)}$$

ecc. ecc.

2. Sviluppo in frazione continua della radice quadrata di un numero intero che non sia un quadrato perfetto.

La radice quadrata di un numero intero che non sia un quadrato perfetto ha uno sviluppo in frazione continua perio-

dica mista della forma

$$A+\frac{b_1}{\underset{*}{a_1}}+\frac{b_2}{a_2}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{b_3}{a_2}+\frac{b_2}{a_1}+\frac{b_1}{\underset{*}{2A}}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

A essendo la radice quadrata del più grande quadrato intero contenuto nel numero intero dato. Il periodo, indicato quì sopra dagli asterischi, ha per ultimo quoziente incompleto $2A$ e gli altri quozienti incompleti formano una serie simmetrica in cui due termini ugualmente distanti dagli estremi sono uguali fra loro.

Una serie simmetrica è pure costituita dai numeratori.

Infatti che la frazione continua debba essere periodica lo dimostra il fatto che x non può essere determinato che per mezzo di una radice di un' equazione di 2.° grado.

Supposto ora che i numeratori parziali siano tutti uguali all' unità positiva scriviamo

$$x=\sqrt{A^2+m}=A+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+x\ .$$

L' n^{esima} ridotta è evidentemente

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{sP_{n-1}+P_{n-2}}{sQ_{n-1}+Q_{n-2}}\ ;$$

se poniamo nel posto di s, $s+x$ si ha

$$x=\frac{(s+x)\,P_{n-1}+P_{n-2}}{(s+x)\,Q_{n-1}+Q_{n-2}}$$

da cui

$$x^2 + \left(s + \frac{Q_{n-2} - P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) x = \frac{P_n}{Q_{n-1}} .$$

Essendo il membro a destra intero sarà

$$\frac{Q_{n-2} - P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

pure intero, vale a dire

$$Q_{n-2} = P_{n-1},$$

uguaglianza verificata solo quando l' A viene trasportato nel primo membro.

Si avrà allora

$$(a\ b\ c\ \ldots\ c) = (c\ b\ \ldots\ a)$$

e quindi

$$\sqrt{A^2 + m} - A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{s} + \sqrt{A^2 + m} - A .$$

Risulta poi evidentemente, perchè sia soddisfatta l' equazione

$$\left(\sqrt{A^2 + m} - A\right)^2 + s\left(\sqrt{A^2 + m} - A\right) = \frac{P_n}{Q_{n-1}},$$

$$s = 2A \qquad \text{e} \qquad \frac{P_n}{Q_{n-1}} = m .$$

a) Da ciò si ottiene anche la relazione

$$m\, Q_{n-1} - 2A\, Q_{n-2} = P_{n-2}$$

che serve a mostrare la caratteristica della periodicità.

Infatti se noi ci serviamo della forma nota della frazione continua,

$$\sqrt{A^2+m}-A=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{\sqrt{A^2+m}-A},$$

e l'esprimiamo in continuanti, sviluppandola si ottiene, dopo alcune modificazioni,

$$m\,Q_{n-1}-2\,A\,Q_{n-2}=P_{n-2}$$

che è appunto l'espressione che ipoteticamente si era affermata vera.

b) In relazione al teorema dato al numero 1 di questo capitolo si può stabilire anche il seguente importante teorema:

L'espressione generale di ogni numero intero, la di cui radice quadrata, sotto la forma di frazione continua avente per numeratori l'unità, ha $q_1, q_2, \ldots q_2, q_1$, per serie simmetrica dei suoi quozienti incompleti, è

$$\left\{\frac{1}{2}(q_1 q_2 \ldots q_2 q_1)m-(-1)^l\frac{1}{2}(q_1 q_2 \ldots q_2)(q_2 \ldots q_2)\right\}^2+$$

$$+(q_1 \ldots q_2)m-(-1)^l(q_2 \ldots q_1)^2$$

l essendo il numero degli elementi della serie.

Si stabilisce ciò col determinare la forma di A che rende intera l'espressione

$$\frac{(A\ q_1 q_2 \ldots q_2 q_1\ A)}{(q_1 q_2 \ldots q_2 q_1)}$$

e col sostituirla in questa nel posto di A: essa è rappresentata da

$$\frac{1}{2}(q_1 \; . \; . \; . \; q_1)\, m - (-1)^l \frac{1}{2}(q_1 \; . \; . \; . \; q_2)(q_2 \; . \; . \; . \; q_2) .$$

3. Espressione di una frazione continua periodica in forma indipendente.

Si consideri la frazione continua della forma

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_m + x}}}$$

e si indichi l' mn^{esimo} denominatore parziale, dove m indica il numero degli elementi del periodo, con

$$Q_n = (a_1 \; . \; . \; . \; a_m \, a_1 \; . \; . \; . \; a_m \, a_1 \; . \; . \; . \; a_1 \; . \; . \; . \; a_{m(n)}) .$$

Scegliendo le prime $m(n-1)$ linee, si sviluppi questo continuante secondo la regola del Laplace; si avrà:

$$Q_n = (a_1 \; . \; . \; . \; a_m \, a_1 \; . \; . \; . \; a_m \; . \; . \; . \; a_1 \; . \; . \; . \; a_{m(n-1)})(a_1 \; . \; . \; . \; a_m) +$$

$$+ (a_1 \; . \; . \; . \; a_m \, a_1 \; . \; . \; . \; a_m \; . \; . \; . \; a_1 \; . \; . \; . \; a_{m-1\,(n-1)})(a_2 \; . \; . \; . \; a_m),$$

ossia, essendo

$$Q_{n-1} = (a_1 \; . \; . \; . \; a_m \, a_1 \; . \; . \; . \; a_m \; . \; . \; . \; a_1 \; . \; . \; . \; a_{m(n-1)})$$

$$Q_{1\,(n-1)} = (a_1 \; . \; . \; . \; a_m \, a_1 \; . \; . \; . \; a_m \; . \; . \; . \; a_1 \; . \; . \; . \; a_{m-1\,(n-1)})$$

$$Q_{(1)} = (a_1 \; . \; . \; . \; a_m)$$

$$P_{(1)} = (a_2 \; . \; . \; . \; a_m),$$

$$Q_n = Q_{(1)} \, Q_{n-1} + P_{(1)} \, Q_{1\,(n-1)} .$$

Adoperando lo stesso processo pel numeratore si ottiene del pari

$$P_n = Q_{(1)} P_{n-1} + P_{(1)} P_{1(n-1)} :$$

la ridotta sarebbe quindi

$$\frac{P_n}{Q_n} = Y_{(n)} = \frac{P_{n-1} + \frac{P_{(1)}}{Q_{(1)}} P_{1(n-1)}}{Q_{n-1} + \frac{P_{(1)}}{Q_{(1)}} Q_{1(n-1)}} = \frac{P_{n-1} + Y_{(1)} P_{1(n-1)}}{Q_{n-1} + Y_{(1)} Q_{1(n-1)}}.$$

a) Se, per la deduzione di questa formola, si fosse proceduto, nello sviluppo del continuante, col scegliere le prime m linee, si sarebbe ottenuto

$$Y_{(n)} = \frac{(a_2 \ldots a_m)\, Y_{(n-1)} + (a_3 \ldots a_m)}{(a_1 \ldots a_m)\, Y_{(n-1)} + (a_2 \ldots a_m)}$$

formola già trovata dal Catalan. [1]

[1] *Grunert*'s Archiv. VI. Theil. S. 223.

CAPITOLO VI.

Alcune applicazioni dei continuanti.

1. Espressione in continuanti della somma delle potenze t^{esime} delle radici di un' equazione di 2.° grado.

Se si ha l' equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

si sa che, chiamando $s_1, s_2 \dots s_t$ per $t \leq n$ le somme delle potenze simili delle radici di quell'equazione, sussistono le relazioni di Newton

$$a_0 s_1 + a_1 = 0$$

$$2a_2 + a_1 s_1 + a_0 s_2 = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$t a_t + a_{t-1} s_1 + \dots + a_1 s_{t-1} + a_0 s_t = 0$$

da cui

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t a_t & a_{t-1} & a_{t-2} & a_{t-3} & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Ponendo ora, in particolare,

$$a_3 = a_4 = \dots = 0 \quad \text{e} \quad a_0 = 1,$$

le $n-2$ radici dell' equazione data diventano zero e le altre due saranno quelle di

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0.$$

Si ha allora, sostituendo,

$$(-1)^t s_t = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1(t)} \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{1(t-1)} \end{vmatrix} - 2a_2 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{1(t-2)} \end{vmatrix}.$$

2. Espressione caratteristica della ridotta di una frazione continua periodica semplice.

Sia data la frazione

$$\frac{b}{a+\frac{b}{a+\frac{b}{a+\cdots}}}$$

Per quello che si è detto al n.° 1, data l'equazione

$$x^2 + ax = b$$

di cui le radici sono

$$x_1 = -\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right) \quad , \quad x_2 = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right) \cdot$$

e chiamato s_{t-1} e s_t rispettivamente la somma delle $t-1^{esime}$ e t^{esime} potenze delle radici sopra scritte, si può scrivere:

$$\frac{s_{t-1}}{s_t} = \frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1} + \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t} + \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}} = \frac{\left(\begin{matrix} & 2b & & b & & b & . & . & b & \\ a & & a & & a & & . & . & & a_{(t-1)} \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} & 2b & & b & & b & . & . & . & b & \\ a & & a & & a & & . & . & . & & a_{(t)} \end{matrix}\right)}$$

Si sa che il numeratore e il denominatore della t^{esima} ridotta della frazione che noi consideriamo, sono espressi da

$$Q_t = \left(\begin{matrix} & b & & b & & b & . & . & . & b & \\ a & & a & & a & & . & . & . & & a_{(t)} \end{matrix}\right)$$

$$P_t = b\, Q_{t-1} = b\left(\begin{matrix} & b & & b & & b & . & . & . & b & \\ a & & a & & a & & . & . & . & & a_{(t-1)} \end{matrix}\right)$$

quindi scomponendo i continuanti dati sopra col porre $2b = b + b$ si ottiene

$$\frac{S_{t-1}}{S_t}=\frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}}=\frac{Q_{t-1}+b\,Q_{t-3}}{Q_t+b\,Q_{t-2}}\,.$$

Ed essendo

$$Q_t=a\,Q_{t-1}+b\,Q_{t-2}$$

$$b\,Q_{t-3}=Q_{t-1}-a\,Q_{t-2}$$

si avrà

$$\frac{Q_{t-2}}{Q_{t-1}}=\frac{2-a\frac{S_{t-1}}{S_t}}{a+2b\frac{S_{t-1}}{S_t}}\,.$$

Sostituendo ad $\frac{S_{t-1}}{S_t}$ il suo valore si ha

$$\frac{P_{t-1}}{Q_{t-1}}=\frac{b\,Q_{t-2}}{Q_{t-1}}=b\,\frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}}$$

risultato ottenuto per la prima volta in tutta la sua generalità dallo Stern. [1]

3. Intorno ad un teorema del Sang. [2]

Il caso più semplice di un teorema scoperto dal Sang e da lui enunciato come il risultato di un processo di induzione, è il seguente :

---

[1] Giornale di Crelle, vol. X. pag. 7.

[2] *On the Extension of Brouncker's Method to the comparison of several magnitudes.* Proc. Roy. Soc. Edin. vol. XVIII. pag. 3[illegible]. 18[illegible]-91.

Se lo sviluppo delle potenze intere e positive di $\sqrt{n}+1$ si scompone nelle sue parti, razionale ed irrazionale, vale a dire se si fa

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n}+1 &= \sqrt{n} + 1 \\
(\sqrt{n}+1)^2 &= 2\sqrt{n} + (n+1) \\
(\sqrt{n}+1)^3 &= (n+3)\sqrt{n} + (3n+1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

si ha che il rapporto fra la parte razionale e il coefficiente della parte irrazionale è approssimativamente uguale a $\sqrt{n}$, e tende a questo valore al crescere indefinito dell' esponente del binomio.

Trascurando la dimostrazione che di esso si può dare [1], si mostri ora, come i valori approssimati di $\sqrt{n}$, ottenuti nel modo detto sopra, sieno del tutto equivalenti alle ridotte di alcune frazioni continue.

Secondo il teorema del Sang si hanno successivamente, partendo dalla prima potenza del binomio $\sqrt{n}+1$, i seguenti valori approssimati di $\sqrt{n}$:

$$\frac{1}{1}\,,\quad \frac{n+1}{2}\,,\quad \frac{3n+1}{n+3}\,,\quad \frac{n^2+6n+1}{4n+4}\,,\quad \ldots:$$

si guardi se questi valori si possono ottenere nel modo ordinario da alcune frazioni continue.

Visto che ciascun numeratore è la somma del numeratore immediatamente precedente e di n volte il corrispondente denominatore e che ciascun denominatore è la somma del precedente numeratore e del precedente denominatore facilmente si deduce che i numeratori si possono esprimere nella forma

(1) Proc. Roy. Soc. Edim. vol. XIX. session 1891-92.

$$|1|,\ \begin{vmatrix} n & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} n & n & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} n & n & n & 1 \\ -1 & 1 & n & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix},\ \ldots$$

e i denominatori nella forma

$$|1|,\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & 1 \\ -1 & 1 & n & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix},\ \ldots$$

E sottraendo la seconda linea di ciascuno di questi determinanti dalla prima, la terza dalla seconda e così via, si ha che ciascuna delle serie precedenti è trasformata in una serie di continuanti; cioè si ha pei numeratori la serie

$$|1|,\ |n+1|,\ \begin{vmatrix} n+1 & n-1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} n+1 & n-1 & 0 \\ -1 & 2 & n-1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix},\ \ldots$$

e pei denominatori la serie

$$|1|,\ |2|,\ \begin{vmatrix} 2 & n-1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & n-1 & 0 \\ -1 & 2 & n-1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix},\ \ldots :$$

da ciò conseguentemente una connessione colle frazioni continue. Ma, ricordando che il continuante numeratore della ridotta di una frazione continua della forma

$$a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots$$

è di un ordine superiore al corrispondente continuante denominatore, conviene, per raggiungere il nostro scopo, crescere di un ordine i continuanti della prima serie; a ciò facilmente si arriva, e la serie dei numeratori è quindi trasformata nella seguente:

$$|1|, \begin{vmatrix} 2 & n-1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & n-1 & 0 \\ -1 & 2 & n-1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \ldots$$

Ne segue, quindi, che le ridotte della frazione continua

$$1+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+\cdots$$

sono equivalenti ai valori approssimati di $\sqrt{n}$ dati dal teorema del Sang e che anzi la stessa $\sqrt{n}$ è uguale alla frazione continua qui sopra scritta.

4. Trasformazione di un quoziente di determinanti in frazione continua.

Si voglia ora risolvere il problema di trasformare in un quoziente di due continuanti il quoziente di due determinanti, in modo d' esprimerlo immediatamente per mezzo di una frazione continua.

Si dimostri perciò il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente per la trasformazione del quoziente di due determinanti

$$\frac{M}{N}=\frac{M}{\Sigma \pm a_{11}\,a_{22}\,\ldots\,a_{nn}}$$

in frazione continua è che sia soddisfatta una delle quattro relazioni

$$M=\frac{\partial N}{\partial a_{11}} \quad , \quad M=\frac{\partial N}{\partial a_{1n}} \quad , \quad M=\frac{\partial N}{\partial a_{n1}} \quad , \quad M=\frac{\partial N}{\partial a_{nn}} \quad .$$

Naturalmente basta che lo si dimostri per una di queste relazioni. Sia

$$M=\frac{\partial N}{\partial a_{11}}=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Si moltiplichino la penultima e l'ultima colonna di M rispettivamente per a_{1n} , $a_{1,n-1}$ e si sottragga da questa quella: lo stesso ragionamento ripetasi per N. Si prosegua nello stesso modo sino a sostituire agli elementi

$$a_{2n} \ \dots \ a_{n-2,n} \ ; \ a_{1,n-1} \ \dots \ a_{24} \ ; \ a_{13}$$

l'elemento zero.

Si avrà

$$\frac{M}{N}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & P_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & T_1 & \dots & Q_{n-3} & P_{n-2} \\ 0 & a_{n2} & V_1 & \dots & R_{n-3} & Q_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & P_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & T_1 & \dots & Q_{n-3} & P_{n-2} \\ a_{n1} & a_{n2} & V_1 & \dots & R_{n-3} & Q_{n-2} \end{vmatrix}} \cdot$$

Ponendo ora il numeratore sotto la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & P_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & V_1 & \dots & Q_{n-2} \end{vmatrix}$$

e operando per la parte sinistra inferiore analogamente a quanto si è fatto prima per la parte destra superiore, si ottiene

$$\frac{M}{N} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}}$$

e siccome è

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1\gamma_1 & \alpha_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2\gamma_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

risulta, come volevasi dimostrare

$$\frac{M}{N}=\frac{\alpha_0}{\alpha_1-\frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_2-\frac{\beta_2\gamma_2}{\alpha_3-\ldots-\frac{\beta_{n-1}\gamma_{n-1}}{\alpha_n}}}}.$$

5. Trasformazione di una frazione continua in serie di potenze.

Risulta facilmente, data, come s'è visto in addietro nel comma h) del numero 2 del capitolo III., la rappresentazione d'un continuante mediante una serie di potenze, che si può esprimere una frazione continua per mezzo del quoziente di due serie di potenze.

Prescindendo da ciò, ricordando gli studi che dall'epoca di Eulero sono stati fatti dagli analisti (1) per trovare le relazioni fra frazioni continue e serie o prodotti infiniti, veniamo ad un esempio di trasformazione di certe frazioni continue in quozienti di serie e quindi in serie di potenze positive o negative di una variabile.

Sia la frazione continua

$$\frac{b_1}{x+a_0-\frac{b_2}{x+a_1-\frac{b_3}{x+a_2-\ldots}}}$$

Il denominatore della ridotta n^{esima} sarà rappresentato da

$$Q_n=\begin{vmatrix} x+a_0 & \sqrt{b_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \sqrt{b_1} & x+a_1 & \sqrt{b_2} & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_2} & x+a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

(1) *Heine* — Journal. f. d. reine u. angew. Mathem. 34. Band. S. 294.
Hankel — Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche, Leipziger Berichte 1862. S. 17. ff.
Nachreiner — Beziehungen zwischen determinanten und Kettenbrüchen. München 1872. S. 19.

ossia, indicando con Q'_n il valore di Q_n per $x=0$, dal seguente polinomio ordinato secondo le potenze crescenti della x:

$$Q_n = Q'_n + x \mathop{S}_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Q'_n}{\partial a_k} + x^2 \mathop{S}_{k=1}^{k=n} \mathop{S}_{l=1}^{l=n} \frac{\partial^2 Q'_n}{\partial a_k \, \partial a_l} + \ldots + x^n ,$$

ma è

$$\frac{\partial Q'_n}{\partial a_k} = \begin{vmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{b_{k-1}} & a_{k-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{k+1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

e per la regola di Laplace

$$\frac{\partial Q'_n}{\partial a_k} = Q'_{0,\,k-1} \; Q'_{k+1,\,n}$$

ed anche

$$\frac{\partial^2 Q'_n}{\partial a_k \, \partial a_l} = Q'_{0,\,k-1} \; Q'_{k+1,\,l-1} \; Q'_{l+1,\,n}$$

. . . .

Il valore della ridotta n^{esima} sarà quindi, dando a P'_n lo stesso significato dato a Q'_n,

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P'_n + x \underset{k=1}{\overset{k=n}{\mathrm{S}}} P'_{1,k-1} P'_{k+1,n} + x^2 \underset{k=1}{\overset{k=n}{\mathrm{S}}} \underset{l=1}{\overset{l=n}{\mathrm{S}}} P'_{1,k-1} P_{k+1,l-1} P'_{l+1,n} + \ldots + x^{n-1}}{Q'_n + x \underset{k=1}{\overset{k=n}{\mathrm{S}}} Q'_{0,k-1} Q'_{k+1,n} + x^2 \underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{S}}} \underset{l=1}{\overset{n}{\mathrm{S}}} Q'_{0,k-1} Q'_{k+1,l-1} Q'_{l+1,n} + \ldots + x^n}$$

Dunque la ridotta n^{esima} di una frazione continua della forma data sopra è rappresentata mediante il quoziente di due polinomi interi di grado $n-1$ ed n rispettivamente: analogamente e successivamente si otterrà l' espressione della frazione continua in quoziente di serie.

6. Trasformazioni di serie in frazioni continue.

Si consideri ora il problema contrario, vale a dire quello di rappresentare una serie o quoziente di serie di potenze mediante una frazione continua. Si abbiano quindi i seguenti problemi:

Esprimere

$$\text{(I)} \qquad 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots}$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots}$$

per mezzo di frazioni continue della forma

$$1 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \ldots}},$$

e

$$\text{(IV)} \qquad 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

per mezzo di una frazione della forma

$$\frac{1}{1}+\frac{x}{a_1}+\frac{x}{a_2}+\frac{x}{a_3}+\ldots$$

Essi si risolvono mediante l'applicazione del principio dei coefficienti indeterminati ottenendosi i quozienti incompleti delle frazioni continue espressi con determinanti.

Data l'identità fra i problemi III. e IV. ed essendo il problema I. un caso particolare del problema II. si consideri quest'ultimo e si determinino $a_1, a_2 \ldots$ in funzione di $A_1, A_2 \ldots B_1, B_2 \ldots$ in modo che sia

$$\frac{1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots}{1+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots}=1+\frac{x}{a_1}+\frac{x}{a_2}+\frac{x}{a_3}+\ldots$$

A tal uopo pongasi

$$A_1-B_1=C_1 \quad , \quad A_2-B_2=C_2 \quad \ldots$$

Facilmente si vede che trasformato il 1.° membro nella espressione

$$1+\frac{C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots}{1+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots}$$

l'uguaglianza scritta sopra si muta nella seguente:

$$(C_1+C_2x+C_3x^3+\ldots)\left(a_1+\frac{x}{a_2}+\frac{x}{a_3}+\ldots\right)=1+B_1x+B_2x^2+\ldots$$

Uguagliando i termini indipendenti da x si ha

$$C_1\,a_1=1$$

e quindi

$$a_1=\frac{1}{C_1}.$$

Di nuovo, eliminando dall' equazione i termini uguali $C_1 a_1$ e 1 e dividendo questa per x, si ottiene

$$(a_1 C_2 - B_1) + (a_1 C_3 - B_2) x + (a_1 C_4 - B_3) x^2 + \dots$$

$$\dots + (C_1 + C_2 x + C_3 x^3 + \dots) \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{x}{a_3 + \cfrac{x}{a_4 + \dots}}} = 0,$$

da cui si ricava uguagliando, dopo aver moltiplicato ambo i membri per $a_2 + \cfrac{x}{a_3 + \cfrac{x}{a_4 + \dots}}$, i termini indipendenti da x:

$$(a_1 C_2 - B_1) a_2 + C_1 = 0$$

e quindi

$$a_2 = -\frac{C_1}{\begin{vmatrix} a_1 & B_1 \\ 1 & C_2 \end{vmatrix}} = -\frac{C_1^2}{\begin{vmatrix} 1 & B_1 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}}.$$

Con processo analogo si ottengono dall' eguaglianza, che aumenta rapidamente in complessità, le equazioni per la determinazione di a_3, a_4 ecc. ecc.

Però una regola semplice è data per la rappresentazione di queste equazioni.

Se noi rappresentiamo ad es. con $(a_2 a_3 \,\mathrm{I}\, B_2 B_1)$ e $(a_1 a_2 a_3 \,\mathrm{I}\, C_3 C_2)$ i continuanti numeratore e denominatore della terza ridotta

$$\frac{P_3}{Q_8} = \frac{(a_2 a_3)}{(a_1 a_2 a_8)} = \frac{a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_8}$$

della frazione continua

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

i cui termini di più alto grado hanno per fattori rispettivamente B_3 e C_3 e quelli di grado immediatamente inferiore rispettivamente i fattori B_1 e C_2; vale a dire se noi poniamo

$$(a_2\, a_3 \,\underline{\mathrm{I}}\, B_2\, B_1) = a_2\, a_3\, B_2 + B_1$$

$$(a_1\, a_2\, a_3 \,\underline{\mathrm{I}}\, C_3\, C_2) = a_1\, a_2\, a_3\, C_3 + a_1\, C_2 + a_3\, C_2$$

allora l' equazione per la determinazione di a_3 è rappresentata da

$$(a_1\, a_2\, a_3 \,\underline{\mathrm{I}}\, C_3\, C_2) - (a_2\, a_3 \,\underline{\mathrm{I}}\, B_2\, B_1) = 0\,.$$

Analogamente le equazioni di a_4, a_5 ... sono rappresentate rispettivamente da

$$(a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \,\underline{\mathrm{I}}\, C_4\, C_3\, C_2) - (a_2\, a_3\, a_4 \,\underline{\mathrm{I}}\, B_3\, B_2) = 0$$

$$(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \,\underline{\mathrm{I}}\, C_5\, C_4\, C_3) - (a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \,\underline{\mathrm{I}}\, B_4\, B_3\, B_2) = 0$$

. . . .

Da queste si deduce

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & B_1 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2}{C_1 \begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_2 \\ 0 & C_1 & C_2 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}}$$

$$a_4 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_2 \\ 0 & C_1 & C_2 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 1 & B_1 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 1 & B_1 & B_2 \\ 0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix}}$$

$$a_5 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 1 & B_1 & B_2 \\ 0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_2 \\ 0 & C_1 & C_2 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 1 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{vmatrix}}$$

ecc. ecc.

Se si pone quindi per semplicità

$$\gamma_1 = C_1$$

$$\gamma_2 = \begin{vmatrix} 1 & B_1 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

e così per γ_3 , γ_4 ecc. rispettivamente i determinanti del 3.° , 4.° ecc. ordine si ha, in ultima analisi,

$$(1) \qquad \frac{1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots} =$$

$$= 1 + \cfrac{x}{\cfrac{1}{\gamma_1} + \cfrac{x}{-\cfrac{\gamma_1^2}{\gamma_2} + \cfrac{x}{\cfrac{\gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_3} + \cfrac{x}{-\cfrac{\gamma_3^2}{\gamma_2 \gamma_4} + \cfrac{x}{\cfrac{\gamma_4^2}{\gamma_3 \gamma_5} + \ldots}}}}} =$$

$$=1+\cfrac{\gamma_1 x}{1-\cfrac{\gamma_2 x}{\gamma_1-\cfrac{\gamma_3 x}{\gamma_2-\cfrac{\gamma_1\gamma_4 x}{\gamma_3-\cfrac{\gamma_2\gamma_5 x}{\gamma_4-\dots}}}}}$$

a) Ricordando che è $C_1 = A_1 - B_1$, $C_2 = A_2 - B_2$, ecc. ecc. risulta, facendo $B_1 = B_2 = B_3 = \ldots = 0$,

$$\gamma_1 = A_1$$

$$\gamma_2 = A_2$$

$$\gamma_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e quindi, ponendo in luogo di questi $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$, si ha:

$$1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots=1+\cfrac{\alpha_1 x}{1-\cfrac{\alpha_2 x}{\alpha_1-\cfrac{\alpha_3 x}{\alpha_2-\cfrac{\alpha_1\alpha_4 x}{\alpha_3-\cfrac{\alpha_2\alpha_5 x}{\alpha_4-\dots}}}}}$$

che è la soluzione generale del primo dei problemi dati.

b) Ponendo invece $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0$ si ottengono per $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$ i valori

$$\gamma_1 = -B_1$$

$$\gamma_2 = -\begin{vmatrix} 1 & B_1 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e indicandoli, per semplicità, con $-\beta_1$, $-\beta_2$, β_3 . . . ci risulta la soluzione generale del III.° problema:

$$\frac{1}{1+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\dots}=1+\cfrac{-\beta x}{1-\cfrac{-\beta_2 x}{-\beta_1-\cfrac{-\beta_3 x}{-\beta_2-\dots}}},$$

da cui, tosto, la soluzione del IV.°:

$$1+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\dots=\cfrac{1}{1-\cfrac{\beta_1 x}{1-\cfrac{\beta_2 x}{\beta_1-\cfrac{\beta_3 x}{\beta_2-\cfrac{\beta_1\beta_4 x}{\beta_3-\cfrac{\beta_2\beta_5 x}{\beta_4-\dots}}}}}}.$$

c) **Osservazione.**

Il Gauss nel trattamento della sua serie generale

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.\,2.\,3.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$

giunge all' espressione

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}}{1-\cfrac{\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1-\dots}}}.$$

la quale, se ben si nota, non è che un caso particolare dell' espressione (1).

7. Trasformazione di frazioni continue in prodotti infiniti.

Ricordando la rappresentazione dei continuanti di una certa forma in prodotto di fattori, data nel comma *e*) del numero 3 del capitolo

terzo, si può con quella esprimere una certa classe di frazioni continue in frazioni semplici aventi i numeratori e i denominatori rappresentati da prodotti continui.

Così:

$$1+\frac{d_1-e_1}{e_1}-\frac{(d_2-e_2)d_1e_1}{d_1d_2-e_1e_2}-\frac{(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_2e_2}{d_2d_3-e_2e_3}-\frac{(d_2-e_2)(d_4-e_4)d_3e_3}{d_3d_4-e_3e_4}-\cdots=$$

$$=\frac{\left(1\ \frac{d_1-e_1}{e_1}\ \frac{-(d_2-e_2)d_1e_1}{d_1d_2-e_1e_2}\ \frac{-(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_2e_2\ \cdots}{\cdots}\right)}{\left(e_1\ \frac{-(d_2-e_2)d_1e_1}{d_1d_2-e_1e_2}\ \frac{-(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_2e_2\ \cdots}{\cdots}\right)}=$$

$$=\frac{d_1d_2(d_1-e_1)d_3(d_2-e_2)\ \cdots}{e_1e_2(d_1-e_1)e_3(d_2-e_2)\ \cdots}=\frac{d_1d_2d_3\ \cdots}{e_1e_2e_3\ \cdots}.$$

8. Prodotto di frazioni continue.

Sia la frazione continua

$$F=\frac{b_1(b_2-\alpha)}{\beta}+\frac{b_2(b_3-\alpha)}{\beta}+\cdots+\frac{b_{n-1}(b_n-\alpha)}{\beta}=$$

$$=\frac{b_1(b_2-\alpha)\left(\beta\ \frac{b_3b_4-b_3\alpha}{\beta}\ \frac{b_4b_5-b_4\alpha}{\beta}\ \cdots\ \frac{b_{n-1}b_n-b_{n-1}\alpha}{\beta}\right)}{\left(\beta\ \frac{b_2b_3-b_2\alpha}{\beta}\ \frac{b_3b_4-b_3\alpha}{\beta}\ \cdots\ \frac{b_{n-1}b_n-b_{n-1}\alpha}{\beta}\right)}.$$

Essendo evidentemente

$$(b_2-\beta)\left(\beta\ \frac{b_3b_4-b_3\alpha}{\beta}\ \cdots\ \frac{b_{n-1}b_n-b_{n-1}\alpha}{\beta}\right)+$$

$$+\left(\beta\ \frac{b_2b_3-b_2\alpha}{\beta}\ \cdots\ \frac{b_{n-1}b_n-b_{n-1}\alpha}{\beta}\right)=$$

$$=b_2\left(\beta+b_3-b_4\;\frac{b_4^2-b_4\alpha}{\beta+b_4-b_5}\;\frac{b_5^2-b_5\alpha}{\ldots}\;\ldots\;\frac{b_n^2-b_n\alpha}{\beta+b_n-\alpha}\right),$$

$$(b_2-\alpha)\left(\beta\;\frac{b_3b_4-b_3\alpha}{\beta\;\ldots}\;\ldots\;\frac{b_{n-1}b_n-b_{n-1}\alpha}{\beta}\right)+$$

$$+\left(\beta\;\frac{b_2b_3-b_2\alpha}{\beta\;\ldots}\;\ldots\;\frac{b_{n-1}b_n-b_{n-1}\alpha}{\beta}\right)=$$

$$\left(\beta+b_2-b_3\;\frac{b_3^2-b_3\alpha}{\beta+b_3-b_4}\;\frac{b_4^2-b_4\alpha}{\ldots}\;\ldots\;\frac{b_n^2-b_n\alpha}{\beta+b_n-\alpha}\right),$$

dividendo membro a membro queste due uguaglianze si ottiene:

$$\frac{b_2(b_2-\alpha)}{\beta+b_2-b_3}+\frac{b_3(b_3-\alpha)}{\beta+b_3-b_4}+\ldots+\frac{b_n(b_n-\alpha)}{\beta+b_n-\alpha}=\frac{(b_2-\beta)F+b_1(b_2-\alpha)}{F+b_1}$$

Aggiungendo ad ambo i membri di questa uguaglianza la quantità

$$\frac{\beta+\alpha}{2}-b_2$$

risulta poi:

$$\frac{\beta+\alpha}{2}-b_2+\frac{b_2(b_2-\alpha)}{\beta+b_2-b_3}+\frac{b_3(b_3-\alpha)}{\beta+b_3+b_4}+\ldots+\frac{b_n(b_n-\alpha)}{\beta+b_n-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{F-b_1}{F+b_1}$$

Ora, rimanendo la frazione F immutata quando si cambiano i segni ad α e a tutti i b, si può naturalmente scrivere:

$$\frac{\beta-\alpha}{2}+b_2+\frac{b_2(b_2-\alpha)}{\beta-b_2+b_3}+\frac{b_3(b_3-\alpha)}{\beta-b_3+b_4}+\ldots+\frac{b_n(b_n-\alpha)}{\beta-b_n+\alpha}=-\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{F+b_1}{F-b_1}$$

Si ottiene quindi, moltiplicando membro a membro queste ultime uguaglianze, il rimarchevole risultato:

$$\left(\frac{\beta+\alpha}{2}-b_2+\cfrac{b_2(b_2-\alpha)}{\beta+b_2-b_3+\cfrac{b_3(b_3-\alpha)}{\beta+b_3-b_4+\cdots+\cfrac{b_n(b_n-\alpha)}{\beta+b_n-\alpha}}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+b_2+\cfrac{b_2(b_2-\alpha)}{\beta-b_2+b_3+\cfrac{b_3(b_3-\alpha)}{\beta-b_3+b_4+\cdots+\cfrac{b_n(b_n-\alpha)}{\beta-b_n+\alpha}}}\right)=\frac{\beta^2-\alpha^2}{4}.$$

a) Se in quest' uguaglianza noi poniamo $\alpha=0$ otteniamo il primo caso del Bauer [1] e il suo secondo caso si ottiene ponendo $\alpha=b-c$ e b_2, b_3, b_4, ecc. uguali rispettivamente a $b, b+h, b+2h$ ecc.

Inoltre se, dopo queste ultime sostituzioni, noi scriviamo $2s+h$ per β e $h-b$ per c, ci risulta un teorema generale d' Eulero [2]; e se in questo noi specializziamo ancora ponendo $s=a-1$, $h=2$ e $b=1$ noi troviamo la identità del Wallis [3]:

$$\left(a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{3^2}{2(a+1)+\cfrac{5^2}{2(a+1)+\cdots}}}\right)\times$$

$$\times\left(a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{3^2}{2(a-1)+\cfrac{5^2}{2(a-1)+\cdots}}}\right)=a^2.$$

9. Osservazione.

È bene ricordare come i continuanti siano stati applicati con utilità in certi problemi di fisica-matematica e di ottica e in certi problemi riguardanti la teoria dell' elettricità.

Merita speciale menzione il Casorati [4] che, con l' aiuto dei lavori del Thiele, ha eseguito la trasformazione in continuanti degli algoritmi di Euler e Möbius, fino allora adoperati, basandosi su un sistema di quattro lenti.

Dette anche una formola generale.

---

(1) Von einem Kettenbruche *Euler*'s u. s. w. München 1872.
(2) Comment. Acad. Petropol. Vol. XI. 1739, Pag. 57 § 46.
(3) Arithmetica Infinitorum Prop. CXCI.
(4) Le proprietà cardinali degli strumenti ottici anche non centrati. Milano. 1872. Pag. 73.

CAPITOLO VII.

Applicazione dei continuanti alla generalizzazione delle frazioni continue algebriche secondo l' algoritmo del Pincherle.

Come si sa, gli irrazionali di 2.° grado hanno la proprietà di essere sviluppabili in frazioni continue periodiche, proprietà che può essere notata come un loro carattere aritmetico.

La quistione di cercare il carattere aritmetico analogo degli irrazionali di ordine superiore fu messa in campo dall' Hermite, il quale, in una lettera al Jacobi, dichiarava che « forse si sarebbe arrivato a dedurre — dalle circostanze rimarchevoli a cui dà luogo la riduzione delle forme i cui coefficienti dipendono dalle radici d' equazioni algebriche a coefficienti interi — un sistema completo di caratteri per ogni specie di tal genere di quantità, analogo a quello, per esempio, che fornisce la teoria delle frazioni continue per le radici delle equazioni di 2.° grado ».

L' Heine, in seguito, pubblicò un trattato del Jacobi sugli algoritmi delle frazioni continue, nel quale si dava un preciso indirizzo al concetto generale dell' Hermite, poichè si otteneva, per la radice cubica di un intero, un carattere aritmetico simile a quello dato per la radice quadrata : lo sviluppo di una di queste radici risulta anch' esso periodico.

Venne di poi il Bachmann (¹) il quale tentò di sciogliere l'importantissima questione se la proprietà trovata dal Jacobi sia generale o no, tentativo il quale portò alla dimostrazione di un teorema.

Una generalizzazione delle frazioni continue, considerate non sotto il punto di vista aritmetico, come fecero il Jacobi e l'Hermite, ma sotto il punto di vista algebrico, fu data dal Pincherle. (²)

Come l'algoritmo delle frazioni continue è fondato sulla relazione ricorrente del 2.° ordine fra i numeratori e i denominatori delle ridotte così questa generalizzazione delle frazioni continue algebriche ha fondamento nelle relazioni ricorrenti d'ordine m.

Ora nel presente capitolo si viene appunto a mostrare che come per le frazioni continue vale una rappresentazione in continuanti così pure per l'algoritmo del Pincherle vale una rappresentazione in determinanti, rappresentazione che offre il vantaggio di una maggior semplicità nel metodo e chiarezza nel risultato.

1. Sui sistemi ricorrenti del 3.° ordine e in particolare sui sistemi periodici.

Date le due successioni infinite di elementi

$$a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n \quad \dots$$

$$b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n \quad \dots$$

si consideri la matrice

$$\left\| \begin{matrix} 1 & a_0 & b_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 & b_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} & b_{n-1} & -1 \end{matrix} \right\|$$

(¹) Giornale di Crelle, 75.

(²) *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche:* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Marzo 1890.

Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche: Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II. Vol. XIX. Pag. 75.

di n linee e di $n+3$ colonne e si considerino i determinanti dell' ordine n da questa generati.

Si può tosto affermare che:

tutti i determinanti che si ottengono sopprimendo tre colonne consecutive qualunque, sono in valore assoluto uguali all' unità.

Valendo la presente proprietà ogniqualvolta, fra le colonne da sopprimersi, si escludono la prima e l'ultima, *si può limitare lo studio a quei determinanti che si ottengono dalla matrice data, prendendo costantemente la prima e l' ultima colonna fra le tre che si devono sopprimere.*

Si hanno quindi soltanto tre tipi di determinanti:

I.) Quelli che si ottengono sopprimendo la prima colonna e le due ultime.

La diagonale principale è costituita, in tal caso, dagli elementi a. Se r e n sono gli indici rispettivamente del primo e ultimo elemento della diagonale principale, il determinante si rappresenta con $\alpha(r, n)$.

II.) Quelli che si ottengono sopprimendo le due prime colonne e l' ultima.

In tal caso i b sono gli elementi diagonali e il determinante si rappresenta con $\beta(r, n)$.

III.) Quelli che si ottengono sopprimendo la prima colonna, l' ultima ed una intermedia qualunque.

La diagonale principale è composta di a e b. Se p sono le colonne precedenti l' intermedia soppressa e $n-p$ le seguenti, quando non vi sia ambiguità fra gli indici delle a e delle b, il determinante si indica con $\gamma(p, n)$.

a) Sia

$$\alpha(0, n-1) = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & -1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_1 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & b_2 & -1 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

un determinante del tipo I.

Si ha tosto, sviluppandolo rispettivamente secondo gli elementi dell' ultima colonna e secondo quelli della prima linea,

$$\alpha(0,n-1)=a_{n-1}\alpha(0,n-2)-b_{n-2}\alpha(0,n-3)-\alpha(0,n-4)$$

$$\alpha(0,n-1)=a_0\alpha(1,n-1)-b_0\alpha(2,n-1)-\alpha(3,n-1)$$

quindi si può concludere:

secondo che le α si considerano generate le une dalle altre aggiungendo successivamente una nuova linea al disotto, od al disopra di quelle scritte, ossia secondo che s' immaginano generate dall' alto al basso o dal basso all' alto, si presentano come integrali dell' una o dell' altra delle due equazioni alle differenze finite:

$$f(n)-a_{n-1}f(n-1)+b_{n-2}f(n-2)+f(n-3)=0$$

$$f(r)-a_r f(r+1)+b_r f(r+2)+f(r+3)=0.$$

b) Analogamente se si ha un determinante del tipo II.

$$\beta(0,n-1)=\begin{vmatrix} b_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-2} & b_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

si ha

$$\beta(0,n-1)=b_{n-1}\beta(0,n-2)+a_{n-2}\beta(0,n-3)+\beta(0,n-4)$$

$$\beta(0,n-1)=b_0\beta(1,n-1)+a_1\beta(2,n-1)+\beta(3,n-1)$$

e quindi essi sono integrali dell' una o dell' altra delle due equazioni alle differenze finite

$$f(n)-b_{n-1}f(n-1)-a_{n-1}f(n-2)-f(n-3)=0$$

$$f(r)-b_r f(r+1)-a_{r+1}f(r+2)-f(r+3)=0.$$

Facilmente si ottiene lo sviluppo di entrambi i tipi.

c) Si consideri ora un determinante del tipo III. e per brevità di scrittura il determinante

$$\gamma(5,8)=\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & b_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_7 & b_7 \end{vmatrix}$$

Pel teorema di Laplace si ha tosto:

$$\gamma(5,8)=\alpha(0,4)\beta(5,7)+\alpha(0,3)\beta(6,7).$$

In generale è quindi:

$$\gamma(p,n)=\alpha(0,p-1)\beta(p,n-1)+\alpha(0,p-2)\beta(p+1,n-1)$$

Sviluppando il determinante secondo gli elementi della prima linea si ha:

$$\gamma(p,n)=b_{n-1}\gamma(p,n-1)+a_{n-1}\gamma(p,n-2)+\gamma(p,n-3),$$

e sviluppandolo invece secondo gli elementi della prima linea si ha:

$$\gamma(p,n)=a_0\gamma(p-1,n)-b_0\gamma(p-2,n)-\gamma(p-3,n);$$

vale a dire i γ sono integrali dell' una o dell' altra delle due equazioni alle differenze

$$f(n)-b_{n-1}f(n-1)-a_{n-1}f(n-2)-f(n-3)=0$$

$$f(p-r)-a_r f(p-r-1)-b_r f(p-r-2)-f(p-r-3)=0$$

Visto che i determinanti γ sono esprimibili in funzione degli α e dei β, in seguito, non si studieranno che questi ultimi.

d) Le seguenti formole sono le espressioni letterali di due teoremi.

I.°

$$\alpha(0,n-2)\,\alpha(1,n-1)=\alpha(1,n-2)\,\alpha(0,n-1)+\beta(0,n-2)$$

$$\beta(0,n-2)\,\beta(1,n-1)=\beta(1,n-2)\,\beta(0,n-1)+\alpha(1,n-1)$$

II.°

$$\alpha(0,n-2)\alpha(2,n-1)=$$

$$=\alpha(0,n-1)\alpha(2,n-2)+a_0\beta(1,n-2)+\beta(2,n-2)$$

$$\beta(0,n-2)\beta(2,n-1)=$$

$$=\beta(0,n-1)\,\beta(2,n-2)-[b_0\alpha(2,n-1)+\alpha(3,n-1)]$$

e) Suppongasi ora che le successioni infinite di elementi siano periodiche e di periodo p; abbiasi cioè:

$$a_0\ a_1\ \ldots\ a_{p-1}\ a_0\ a_1\ \ldots\ a_{p-1}\ a_0\ \ldots$$

$$b_0\ b_1\ \ldots\ b_{p-1}\ b_0\ b_1\ \ldots\ b_{p-1}\ b_0\ \ldots$$

Si vuol cercare che risultati porta questa periodicità sulle funzioni $\sigma_0\ \sigma_1\ \sigma_2\ \ldots\ \sigma_n\ \ldots$ costituenti il seguente sistema ricorrente del 3.° ordine:

$$\sigma_0 + a_0\,\sigma_1 + b_0\,\sigma_2 = \sigma_3$$

$$\sigma_1 + a_1\,\sigma_2 + b_1\,\sigma_3 = \sigma_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_p + a_0\,\sigma_{p+1} + b_0\,\sigma_{p+2} = \sigma_{p+3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Vogliasi trovare una relazione fra le quattro funzioni consecutive

$$\sigma_{np}\ ,\ \sigma_{(n+1)p}\ ,\ \sigma_{(n+2)p}\ ,\ \sigma_{(n+3)p}$$

i cui indici sono congrui a zero rispetto al modulo p.

Se dal sistema ricorrente visto sopra, si prendono le successive equazioni a partire dalla

$$\sigma_{np} + a_0\,\sigma_{np+1} + b_0\,\sigma_{np+2} = \sigma_{np+3}$$

e terminando alla

$$\sigma_{(n+3)p-3} + a_{p-3}\,\sigma_{(n+3)p-2} + b_{p-3}\,\sigma_{(n+3)p-1} = \sigma_{(n+3)p}$$

e a queste si uniscono le

$$\sigma_{np} = \sigma'_{np}$$

$$\sigma_{(n+1)p} = \sigma'_{(n+1)p}$$

$$\sigma_{(n+2)p} = \sigma'_{(n+2)p}$$

$$\sigma_{(n+3)p} = \sigma'_{(n+3)p}$$

si avrà un sistema di $3p+2$ equazioni fra le $3p+1$ incognite

$$\sigma_{np}\ ,\ \sigma_{np+1}\ ,\ \sigma_{np+2}\ \ldots\ \sigma_{(n+3)p}$$

possibile, soltanto, se il determinante formato coi coefficienti e coi termini noti è zero. Nel caso di $p=3$ si ha che la condizione è espressa da

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{3n} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{3n+3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{3n+6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma_{3n+9} \\
1 & a_0 & b_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & a_1 & b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & a_2 & b_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & a_0 & b_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 & b_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_2 & b_2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_0 & b_0 & -1 & 0
\end{vmatrix} = 0$$

Passando al caso generale si ottiene, sviluppando il determinante rispetto agli elementi dell' ultima colonna, la relazione

$$(-1)^{9p+4} D_1 \sigma_{np} + (-1)^{8p+5} D_2 \sigma_{(n+1)p} +$$
$$+ (-1)^{7p+6} D_3 \sigma_{(n+2)p} + (-1)^{6p+5} D_4 \sigma_{(n+3)p} = 0;$$

in cui D_1, D_2, D_3, D_4 sono i determinanti d' ordine $3p-2$ che si ottengono dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix}
1 & a_0 & b_0 & -1 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & a_1 & b_1 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & .. & a_{p-1} & b_{p-1} & -1 & .. & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & a_0 & b_0 & .. & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & a_{p-4} & b_{p-4} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & a_{p-3} & b_{p-3} & -1
\end{matrix} \right\|$$

segnando le 1.ª, $p+1^{esima}$, $2p+1^{esima}$, $3p+1^{esima}$, colonne e di queste conservando successivamente la 1.ª, la 2.ª, la 3.ª, e la 4.ª, e sopprimendo le altre tre.

Dietro semplici considerazioni si vede poi che, avendo i termini della relazione soprascritta il fattor comune D_1, quella si può mettere sotto la forma

$$\sigma_{np} + \delta\,\sigma_{(n+1)p} + \delta_1\,\sigma_{(n+2)p} = \sigma_{(n+3)p}\,,$$

in cui δ e δ_1 sono espresse dalle formole

$$\delta = \alpha(0\,,p-1) - b_{p-1}\,\alpha(1\,,p-2) - \alpha(2\,,p-2) - \alpha(1\,,p-3)$$

$$\delta_1 = \beta(p-1\,,p-2) + a_{p-1}\,\beta(0\,,p-3) + \beta(1\,,p-3) + \beta(0\,,p-4).$$

f) Facilmente si deduce anche la dimostrazione del seguente teorema:

In un sistema ricorrente del 3.° ordine, definito da due serie di coefficienti che si riproducono col periodo p, fra quattro funzioni appartenenti ad una medesima classe, consecucutive, qualunque, passa una relazione lineare a coefficienti costanti.

Vale anche la reciproca.

g) Volendosi, ora, la forma generale delle funzioni σ_α appartenenti al sistema ricorrente del 3.° ordine, a coefficienti periodici, considerato, si ponga, nell' equazione

$$\sigma_\alpha + \delta\,\sigma_{\alpha+p} + \delta_1\,\sigma_{\alpha+2p} = \sigma_{\alpha+3p}\,,$$

$$\sigma_\alpha = y^\alpha.$$

Si ottiene

$$y^\alpha + \delta\,y^{\alpha+p} + \delta_1\,y^{\alpha+2p} = y^{\alpha+3p}$$

ossia

$$1 + \delta y^p + \delta_1 y^{2p} - y^{3p} = 0;$$

e ponendo

$$y^p = z$$

si giunge all' equazione cubica

$$1 + \delta z + \delta_1 z^2 - z^3 = 0.$$

Chiamando z_1, z_2, z_3 i tre rami della funzione z definita da questa equazione ed indicando con $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_p$ le radici p^{esime} dell' unità, avremo per σ_α la forma:

$$\sigma_\alpha = c_1 \omega_1^\alpha z_1^\alpha + c_2 \omega_2^\alpha z_1^\alpha + \ldots + c_p \omega_p^\alpha z_1^\alpha + c_{p+1} \omega_1^\alpha z_2^\alpha + \ldots$$

$$\ldots + c_{2p} \omega_p^\alpha z_2^\alpha + c_{2p+1} \omega_1^\alpha z_3^\alpha + \ldots + c_{3p} \omega_p^\alpha z_3^\alpha.$$

Dunque:

Le funzioni (σ) appartenenti al sistema dipendono razionalmente dalle radici di un' equazione cubica i cui coefficienti sono di grado p rispetto al grado del sistema, e contengono $3p$ costanti arbitrarie.

2. Algoritmo del Pincherle.

Veniamo ora ad applicare quanto s' è detto al numero 1. di questo capitolo alla *generalizzazione delle frazioni continue algebriche* del Pincherle. Si vedrà appunto, in quel che segue, come si possa generalizzare la proprietà delle frazioni continue periodiche e specialmente come si possa generalizzare la proprietà fondamentale che *una frazione continua periodica rappresenta un irrazionale di 2.° grado.*

Si avverte che con lievi difficoltà, e di pura forma, si passerebbe al caso generale di p funzioni legate da una relazione ricorrente di $p+2$ termini.

a) Sieno

$$\sigma_1 \quad \sigma_2$$

due serie di potenze decrescenti di x, rispettivamente di grado -1 e -2.

Si determini il binomio

$$a_0 = a'_0\, x + a''_0$$

e la costante b_0 in modo che

$$\sigma_3 = 1 + a_0\, \sigma_1 + b_0\, \sigma_2$$

risulti del grado —3.

Analogamente si determinino a_1 e b_1 per modo che

$$\sigma_4 = \sigma_1 + a_1\, \sigma_2 + b_1\, \sigma_3$$

sia del grado —4 e così via.

Le due successioni di elementi

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad \dots$$

$$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n \quad \dots$$

ottenute dal processo suindicato, diconsi ottenute mediante *l'algoritmo generalizzato delle frazioni continue.*

Volendo eliminare dal sistema d' equazioni

$$\begin{aligned} 1 + a_0\, \sigma_1 \quad &+ b_0\, \sigma_2 \quad = \sigma_3 \\ \sigma_1 + a_1\, \sigma_2 \quad &+ b_1\, \sigma_3 \quad = \sigma_4 \\ \dots\dots &\dots\dots\dots \\ \sigma_n + a_n\, \sigma_{n+1} &+ b_n\, \sigma_{n+2} = \sigma_{n+3} \end{aligned}$$

le

$$\sigma_3 \;,\quad \sigma_4 \;,\quad \dots \quad \sigma_{n+2}\,,$$

allo scopo di ottenere la relazione

$$A_n + B_n\, \sigma_1 + C_n\, \sigma_2 = \sigma_{n+3}\,,$$

basta unire alle equazioni date sopra le identità:

$$\begin{aligned} 1 &= \sigma'_0 \\ \sigma_1 &= \sigma'_1 \\ \sigma_2 &= \sigma'_2 \\ \sigma_{n+3} &= \sigma'_{n+3} \end{aligned}$$

ed avendo allora un sistema di $n+5$ equazioni ad $n+4$ incognite

$$\sigma'_0\,,\ \sigma'_1\,,\ \sigma'_2\,,\ \sigma_3\,,\ \sigma_4\,,\ \ldots\ \sigma_{n+2}\,,\ \sigma'_{n+3}\,,$$

si avrà identicamente :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 1 & \sigma_{n+3} \\ 1 & a_0 & b_0 & -1 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & b_1 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_{n-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_n & b_n & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando secondo gli elementi dell' ultima colonna, si ha:

$$\beta(1\,,n) + [a_0\,\beta(1\,,n) + \beta(2\,,n)]\,\sigma_1 + \beta(0\,,n)\,\sigma_2 = \sigma_{n+3}$$

da cui risulta

$$\begin{aligned} A_n &= \beta(1\,,n) \\ B_n &= a_0\,\beta(1\,,n) + \beta(2\,,n) \\ C_n &= \beta(0\,,n) \end{aligned}$$

Mediante poi le formole mostrate in addietro si può scrivere

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} + A_{n-3}$$

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} + B_{n-3}$$

$$C_n = b_n C_{n-1} + a_n C_{n-2} + C_{n-3} :$$

A_n, B_n e C_n sono, quindi, integrali dell' equazione alle differenze

$$f(n) - b_n f(n-1) - a_n f(n-2) - f(n-3) = 0 .$$

b) Dalle formole già ricavate

$$\alpha(0, n-2)\alpha(1, n-1) = \alpha(1, n-2)\alpha(0, n-1) + \beta(0, n-2)$$

$$\alpha(0, n-2)\alpha(2, n-1) = \alpha(0, n-1)\alpha(2, n-2) + a_0 \beta(1, n-2) + \beta(2, n-2)$$

si ottiene :

$$\beta(1, n) = \alpha(1, n)\alpha(2, n+1) - \alpha(2, n)\alpha(1, n+1)$$

$$a_0 \beta(1, n) + \beta(2, n) = \alpha(0, n)\alpha(2, n+1) - \alpha(2, n)\alpha(0, n+1)$$

$$\beta(0, n) = \alpha(0, n)\alpha(1, n+1) - \alpha(1, n)\alpha(0, n+1)$$

da cui, ponendo

$$P_n = -\alpha(0, n)$$

$$Q_n = \alpha(1, n)$$

$$R_n = \alpha(2, n),$$

si hanno le formole:

$$A_n = Q_n R_{n+1} - R_n Q_{n+1}$$

$$B_n = R_n P_{n+1} - P_n R_{n+1}$$

$$-C_n = P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1}$$

I polinomi P_n, Q_n, R_n sono dunque espressi in funzione di A_n, B_n e C_n supposti noti: reciprocamente, partendo dalle formole già trovate

$$\beta(0,n-2)\beta(1,n-1)=\beta(1,n-2)\beta(0,n-1)+\alpha(1,n-1)$$

$$\beta(0,n-2)\beta(2,n-1)=\beta(0,n-1)\beta(2,n-2)-[b_0\alpha(2,n-1)+\alpha(3,n-1)]$$

e trasformandole, si ricavano le formole:

$$P_n = B_{n-1} C_n - C_{n-1} B_n$$

$$Q_n = C_{n-1} A_n - C_n A_{n-1}$$

$$R_n = A_{n-1} B_n - B_{n-1} A_n$$

Potendosi porre

$$P_n = a_n P_{n-1} - b_{n-1} P_{n-2} - P_{n-3}$$

$$Q_n = a_n Q_{n-1} - b_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-3}$$

$$R_n = a_n R_{n-1} - b_{n-1} R_{n-2} - R_{n-3}$$

si vede che i polinomi P_n, Q_n e R_n sono integrali dell' equazione alle differenze

$$f(n)-a_n f(n-1)+b_{n-1} f(n-2)+f(n-3)=0.$$

c) Risolvendo ora le due equazioni lineari

$$B_{n-1}\sigma_1 + C_{n-1}\sigma_2 = \sigma_{n+2} - A_{n-1}$$

$$B_n \sigma_1 + C_n \sigma_2 = \sigma_{n+3} - A_n$$

rispetto a σ_1 e σ_2 si ottiene:

$$\sigma_1 = \frac{Q_n + C_n \sigma_{n+2} - C_{n-1}\sigma_{n+3}}{P_n}$$

$$\sigma_2 = \frac{R_n + B_{n-1}\sigma_{n+3} - B_n \sigma_{n+2}}{P_n}$$

e ponendo

$$\lambda_n = C_n \sigma_{n+2} - C_{n-1} \sigma_{n+3}$$

$$\mu_n = B_{n-1} \sigma_{n+3} - B_n \sigma_{n+2}$$

si ha:

$$\sigma_1 - \frac{Q_n}{P_n} = \frac{\lambda_n}{P_n}$$

$$\sigma_2 - \frac{R_n}{P_n} = \frac{\mu_n}{P_n},$$

in cui le frazioni ai secondi membri sono dei gradi rispettivi $-3r+1$ e $-3r+2$ per $n=2r$; $-3r$ e $-3r$ per $n=2r+1$.

Posto ora che, in un punto del piano della variabile complessa, le due frazioni $\frac{\lambda_n}{P_n}$, $\frac{\mu_n}{P_n}$, per n crescente, tendano in ugual grado a zero, si avranno le relazioni notevoli:

$$\sigma_1 = \lim_{n=\infty} \frac{Q_n}{P_n}$$

$$\sigma_2 = \lim_{n=\infty} \frac{R_n}{P_n}.$$

Queste formole dimostrano, che, come la serie dei quozienti incompleti, sotto determinate condizioni di convergenza, serve a determinare il valore della frazione continua che si presenta come il limite delle ridotte, così le due serie

$$a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_n \quad \ldots$$

$$b_0 \quad b_1 \quad \ldots \quad b_n \quad \ldots$$

servono a determinare le funzioni analitiche σ_1 e σ_2 sviluppabili in serie di potenze decrescenti rispettivamente del grado -1 e -2, le quali si presentano come limiti di due frazioni aventi il medesimo denominatore.

d) Se le due serie date sono periodiche col medesimo periodo p, vale a dire se si ha:

$$a_0 \quad a_1 \ . \ . \ . \ a_{p-1} \quad a_0 \ . \ . \ .$$

$$b_0 \quad b_1 \ . \ . \ . \ b_{p-1} \quad b_0 \ . \ . \ . \ ,$$

ponendo $n = rp - 1$ si ottiene:

$$P_n = \alpha(0, 1, \ . \ . \ . \ p-1, 0, 1, \ . \ . \ . \ p-1, 0, 1, \ . \ . \ .)$$

e analogamente per Q_n e R_n.

Sviluppando P_n secondo gli elementi della prima linea si ottiene, dopo riduzioni:

$$-P_{rp-1} = P_{p-1} P_{(r-1)p-1} + (b_{p-1} P_{p-2} + P_{p-3}) Q_{(r-1)p-1} + P_{p-2} R_{(r-1)p-1} \ .$$

Analogamente è:

$$-Q_{rp-1} = Q_{p-1} P_{(r-1)p-1} + (b_{p-1} Q_{p-2} + Q_{p-3}) Q_{(r-1)p-1} + Q_{p-2} R_{(r-1)p-1}$$

$$-R_{rp-1} = R_{p-1} P_{(r-1)p-1} + (b_{p-1} R_{p-2} + R_{p-3}) Q_{(r-1)p-1} + R_{p-2} R_{(r-1)p-1} \ .$$

Quindi:

$$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{Q_{p-1} + (b_{p-1} Q_{p-2} + Q_{p-3}) \dfrac{Q_{(r-1)p-1}}{P_{(r-1)p-1}} + Q_{p-2} \dfrac{R_{(r-1)p-1}}{P_{(r-1)p-1}}}{P_{p-1} + (b_{p-1} P_{p-2} + P_{p-3}) \dfrac{Q_{(r-1)p-1}}{P_{(r-1)p-1}} + P_{p-2} \dfrac{R_{(r-1)p-1}}{P_{(r-1)p-1}}}$$

$$\frac{R_n}{P_n} = \frac{R_{p-1} + (b_{p-1} R_{p-2} + R_{p-3}) \dfrac{Q_{(r-1)p-1}}{P_{(r-1)p-1}} + R_{p-2} \dfrac{R_{(r-1)p-1}}{P_{(r-1)p-1}}}{P_{p-1} + (b_{p-1} P_{p-2} + P_{p-3}) \dfrac{Q_{(r-1)p-1}}{P_{(r-1)p-1}} + P_{p-2} \dfrac{R_{(r-1)p-1}}{P_{(r-1)p-1}}}$$

da cui, passando al limite per $n = \infty$ ovvero per $r = \infty$, supposto convergenti in ugual grado le frazioni $\frac{\lambda_n}{P_n}$, $\frac{\mu_n}{P_n}$, si hanno le relazioni:

$$\sigma_1 = \frac{Q_{p-1} + (b_{p-1} Q_{p-2} + Q_{p-3})\sigma_1 + Q_{p-2}\sigma_2}{P_{p-1} + (b_{p-1} P_{p-2} + P_{p-3})\sigma_1 + P_{p-2}\sigma_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{R_{p-1} + (b_{p-1} R_{p-2} + R_{p-3})\sigma_1 + R_{p-2}\sigma_2}{P_{p-1} + (b_{p-1} P_{p-2} + P_{p-3})\sigma_1 + P_{p-2}\sigma_2}$$

Facendo sparire i denominatori si ottengono due equazioni simultanee del 2.° grado soddisfatte da σ_1 e σ_2: eliminandole si ricavano due equazioni della forma

$$A\,\sigma_1^3 + B\,\sigma_1^2 + \Gamma\,\sigma_1 + \Delta = 0$$

$$A'\sigma_2^3 + B'\sigma_2^2 + \Gamma'\sigma_2 + \Delta' = 0$$

i cui coefficienti sono funzioni razionali intere, di grado determinato, in x.

Questo fatto serve a dimostrare il teorema che:

se si hanno due serie periodiche col medesimo periodo p della forma

$$a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{p-1} \quad a_0 \quad a_1 \quad \dots$$

$$b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{p-1} \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots$$

le funzioni

$$\sigma_1 = \lim_{n=\infty} \frac{Q_n}{P_n}$$

$$\sigma_2 = \lim_{n=\infty} \frac{R_n}{P_n}$$

determinate da queste due serie di quantità, sono radici di un' equazione algebrica di 3.° grado.

3. Rappresentazione della σ_1 in frazione continua.

Si consideri l' espressione

$$\sigma_1 = \lim_{n=\infty} \frac{Q_n}{P_n}$$

Essendo $P_n = -\alpha(0, n)$ e $Q_n = \alpha(1, n)$ si ha, sostituendo:

$$\frac{Q_n}{P_n} = -\frac{\alpha(1,n)}{\alpha(0,n)} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2 & -1 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & -1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_1 & -1 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}}$$

Ma essendo in questo caso

$$\alpha(1, n) = \frac{\partial \alpha(0, n)}{\partial a_0}$$

potremo, per un teorema dimostrato al numero 4 del cap. VI., rappresentare la funzione σ_1 mediante una frazione continua di cui $\frac{Q_n}{P_n}$ sarebbe la ridotta n^{esima}.

Si ha infatti

$$\frac{Q}{P} = \frac{\alpha(1, n_\infty)}{\alpha(0, n_\infty)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_1 + b_0 b_1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 + a_2 b_0 & b_0(1 + a_2 b_0) + b_0 b_2 (a_1 + b_0 b_1) & \dots \\ 0 & b_0 & b_0 + a_3 (a_1 + b_0 b_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a_1 & a_1 + b_0 b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 + a_2 b_0 & b_0(1 + a_2 b_0) + b_0 b_2 (a_1 + b_0 b_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}$$

da cui

$$\sigma_1 = \cfrac{1}{a_0 - \cfrac{b_0}{a_1 - \cfrac{a_1 + b_0 b_1}{1 + a_2 b_0 - \cfrac{b_0(1 + a_2 b_0) + b_0 b_2 (a_1 + b_0 b_1)}{b_0 + a_2 (a_1 + b_0 b_1) - \ldots}}}}$$

a) Per la funzione

$$\sigma_2 = \lim_{n=\infty} \frac{R_n}{P_n} = \frac{\alpha(2, n)}{\alpha(0, n)},$$

non valendo il teorema che

$$\alpha(2, n) = \frac{\partial \alpha(0, n)}{\partial a_0}$$

è impossibile la rappresentazione in frazione continua.

4. Osservazione.

La rappresentazione qui fatta della funzione σ_1, radice dell' equazione di 3.° grado

$$A \sigma_1^3 + B \sigma_1^2 + \Gamma \sigma_1 + \Delta = 0,$$

in frazione continua, si ricollega colla rappresentazione della radice di un' equazione algebrica, data dal Fürstenau [1] come quoziente di due determinanti di ordine infinito e ricondotta a frazione continua dal Günther. [2]

Infatti partendo dall' equazione

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

e ugualmente si procederebbe nel caso generale, si ha, col Fürstenau, per la più grande delle radici reali:

---

[1] Darstellung der reellen Wurzeln algebaischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten, Marburg 1860.

[2] *Sulla risoluzione delle equazioni per mezzo delle frazioni continue:* Math. Ann. vol. VII Pag. 267.

Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter form, Erlangen 1873 §§ 25-26.

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}:$$

da cui, facilmente, col Günther:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2^2 - a_1 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 a_2 - a_0 & a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1 a_2 - a_0) & \dots \\ 0 & 0 & a_0 a_2 & a_1(a_2^2 - a_1) - a_0 a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & a_2^2 - a_1 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 a_2 - a_0 & a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1 a_2 - a_0) & \dots \\ 0 & 0 & a_0 a_2 & a_1(a_2^2 - a_1) - a_0 a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}$$

e quindi

$$x_3 = a_1 - \frac{a_0 a_2}{a_1} - \frac{a_0(a_2^2 - a_1)}{a_1 a_2 - a_0} - \frac{a_0 a_2 [a_2(a_2^2 - a_1) - (a_1 a_2 - a_0)]}{a_1(a_2^2 - a_1) - a_0 a_2} - \ldots$$

Nel caso, però, che qualcuno dei coefficienti dell' equazione fosse nullo, sarebbe impossibile una riduzione dei determinanti in continuanti e quindi non si potrebbe esprimere la radice in frazione continua.

Maggio, 1899.